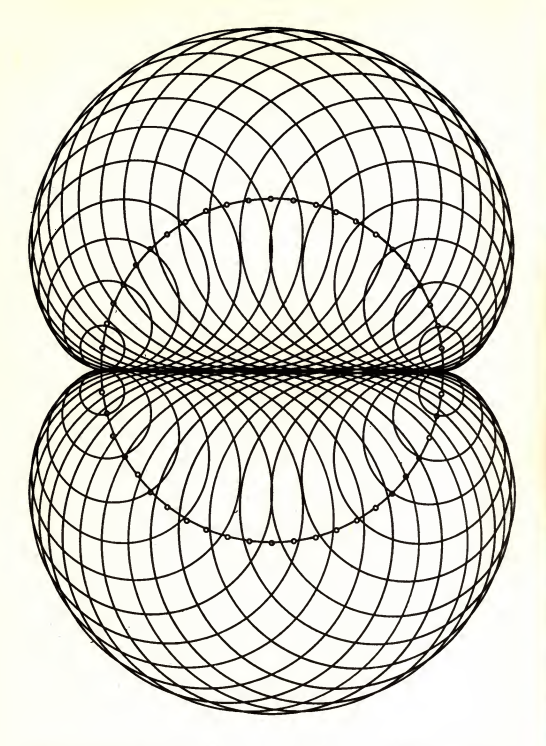
Квант

9
1977

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Кривая, изображенная на обложке, называется нефроидой. Ее назвали так в конце XIX века за сходство с почками (от греческого νεφρος — «почка»). Впервые свойства нефроиды изучал в XVII веке саксонский дворянин Э. В. Чиригауз. В 1686 году Чиригауз издал книгу Medicina mentis («Врачевание души»), в которой пытался указать универсальные правила отыскания истины. Правила забыли, а анализ кривых, которым сам Чиригауз отводил вспомогательную роль, принес автору мировую известность.

На рисунке нефроида представлена как огибающая некоторого семейства окружностей. Строится это семейство так: фиксируются окружность и один из ее диаметров и проводятся всевозможные окружности с центрами на данной окружности, касающиеся данного ее диаметра.

Подробнее о нефроиде читайте на с. 43.



Основан в 1970 году

9
1977

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство „Наука" Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Научное творчество учащихся

Весной 1977 года Секретариат ЦК ВЛКСМ, Коллегия Министерства просвещения СССР, Президиум Всесоюзного совета научно-технических обществ и Президиум правления Всесоюзного общества «Знание» приняли совместное постановление «О научном обществе учащихся». В этом постановлении утверждено примерное Положение о научном обществе учащихся (НОУ) и поставлена задача «принять конкретные меры по созданию научных обществ учащихся повсеместно».

Цель НОУ — привлечь школьников к активной творческой деятельности. В нашей стране уже давно и успешно работают научные объединения учащихся Малая академия наук (МАН) «Искатель» (Крымская обл.), Челябинское научное общество учащихся, научное общество учащихся «Винторул» (Кишинев), математическое общество «Поиск» (г. Малая Вишера), научно-техническое общество учащихся г. Норильска. Значительный вклад в развитие познавательной активности и творческих способностей учащихся вносят Дворцы и Дома пионеров и школьников. Многочисленные научные объединения, кружки и секции для учащихся созданы при научно-исследовательских и проектных организациях, при высших и средних специальных учебных заведениях. О большой и плодотворной работе членов НОУ красноречиво свидетельствуют итоги первого Всероссийского слета актива научных обществ учащихся (об этом слете рассказывалось в «Кванте», 1975, № 9).

Перед научными обществами учащихся стоят важные задачи. НОУ призваны активно содействовать школе в коммунистическом воспитании учащихся, в их всестороннем развитии, в выработке у них творческого отношения к труду, привить школьникам интерес к изучению основ общественно-политических, гуманитарных, естественных и математических наук, познакомить школьников с методами и приемами доступных им научных исследований и чтения научной литературы.

Редакционная коллегия и редакция журнала «Квант», горячо поддерживая решение о создании сети научных обществ учащихся, намерены систематически помогать этим обществам в их деятельности, рассказывать читателям об опыте работы лучших обществ.

Материалом для работы членов НОУ могли бы послужить циклы помещаемых в журнале тематически близких статей по физике или математике, подготовка докладов и сообщений по этим статьям, коллективное обсуждение отдельных проблем, выяснение непонятного с учителем или научным руководителем, решение задач и обобщение этих решений и т. д. Богатые возможности для творческой работы членов НОУ открывают публикуемые в журнале описания экспериментов и разнообразные задачи. Подчеркнем, что многие из этих задач, по существу, являются темами для содержательных самостоятельных исследований.

Не нужно думать, что исследовательская работа школьников может носить лишь учебно-познавательный характер, что они в состоянии только выступать с рефератами статей или решать «известные» задачи. Опыт многих НОУ свидетельствует: школьникам доступны и серьезные содержательные проблемы, решения которых интересны для науки и техники. В качестве примера приведем сообщение, недавно опубликованное газетой «Известия»: «Устройство «Антисон», созданное горьковскими радиолюбителями — конструктором А. С. Щербаковым и школьниками И. Буровым и Э. Сееднёвым, заинтересовало специалистов. Это устройство чутко реагирует на ослабление внимания автоводителей во время движения». Напомним также итоги первого Всероссийского слета актива научных обществ учащихся: из представленных на слете работ 79 нашли различное применение в народном хозяйстве, а 37 были опубликованы в журналах и сборниках.

В редакции «Кванта» всегда с особым вниманием относятся к материалам, которые присылают наши читатели-школьники. Консультанты журнала стараются подробно и всесторонне оценить каждую работу, дать полезные советы по ее продолжению и доработке, ответить на вопросы. Для ответов на вопросы, представляющие общий интерес, в журнале создан специальный раздел «Спрашивайте — отвечаем». Наиболее удачные и содержательные материалы школьников появились в виде статей на страницах журнала; за истекшие годы в «Кванте» было опубликовано около двадцати таких статей. И в настоящем номере журнала читатели найдут работу школьника Вадима Книжника из Москвы. Журнал намерен и впредь продолжать эту практику.

Большой популярностью пользуется проводимый журналом конкурс решения задач, помещаемых в «Задачнике «Кванта»». Редакция журнала приглашает всех членов НОУ, интересующихся физикой и математикой, к участию в этом конкурсе.

Членам и руководителям научных обществ учащихся, особенно вновь созданных, будет, несомненно, интересно и полезно познакомиться с опытом работы других НОУ. Вот, например, письмо, которое прислали в «Квант» от имени членов математического общества школьного отделения МАН «Искатель» Павел Корняков, Олег Конник и Александр Мебель.

«Сообщаем Вам, что у нас, по-прежнему, работает школьное отделение МАН «Искатель» Крыма. Отделение продолжает поиски новых, более интересных, полезных, увлекательных форм работы. Сейчас отделение включает четыре общества: математическое, физическое, химическое и биологическое. Математическое общество проводит олимпиады, конкурсы, вечера, общественные смотры знаний, математические «бои» и др. Все это дает положительные результаты. Члены и кандидаты в члены МАН нашей школы являются победителями районных, городских и областных олимпиад по математике.

Команда Крыма на республиканской олимпиаде, как правило, включает учащихся нашей школы № 40 г. Симферополя. И выступают наши юные математики довольно неплохо. На последней олимпиаде Украины наши учащиеся заняли два первых и два третьих места, а наш девятиклассник Александр Беспалов был включен в команду Украины.

Все команды нашей школы выписывают журнал «Квант», решают задачи, публикуемые в этом журнале. Выпускник нашей школы прошлого года Олег Годин за успешное решение задач был премирован годичной подпиской на журнал «Квант»...»

Редакция «Кванта» намерена информировать своих читателей о наиболее интересных начинаниях научных обществ учащихся и о работах членов НОУ. Приглашаем руководителей секций физики и математики НОУ писать в журнал о своих планах, тематике и формах занятий, о научных исследованиях учеников.

В. Глушков

Теория вычислительных систем и программирование в СССР

В этом году наша страна празднует 60-летие Великой Октябрьской социалистической революции. Как сказал Генеральный секретарь ЦК КПСС Л. И. Брежнев, отвечая на вопросы главного редактора газеты «Асахи» С. Хата, «за прошедшие 60 лет советский народ под руководством Коммунистической партии прошел путь, которым мы вправе гордиться. При жизни одного поколения было покончено с вековой отсталостью. Наша страна вышла на высокий уровень экономического и научно-технического развития. Если на долю дореволюционной России приходилось лишь немногим более 4 процентов мировой промышленной продукции, то сегодня Советский Союз производит пятую ее часть»*).

Новый огромный скачок, который предстоит совершить нашей стране в 10-й пятилетке, требует дальнейшего ускорения темпов научно-технического прогресса, быстрейшего использования достижений научно-технической революции для улучшения качества и эффективности работы во всех звеньях народного хозяйства. Современная электронная вычислительная техника является одним из определяющих факторов в научно-технической революции, в дальнейшем прогрессе науки, техники и производства.

«Основными направлениями развития народного хозяйства СССР на 1976—1980 годы» предусмотрено увеличение выпуска средств вычислительной техники в 1,8 раза, дальнейшее развитие производства универсальных и управляющих вычислительных комплексов, поставлены большие задачи по дальнейшему развитию применений ЭВМ в научных исследованиях, на производстве и в экономике.

Сама вычислительная техника, начиная с появления первого электронного компьютера, также находится в процессе бурного развития. Если основная функция машин первого поколения состояла в реализации простой системы команд, то в современных машинах устройства должны выполнять целый ряд новых функций. В течение прошлой пятилетки наша промышленность перешла на выпуск единой системы (ЕС) ЭВМ третьего поколения. Переход к ЕС ЭВМ коренным образом меняет организацию использования вычислительной техники, включая такие элементы этой организации, как техника программирования, организация данных, организация вычислительного процесса, характер взаимодействия пользователя с ЭВМ и др. Необходимость подобной перемены обусловлена вполне определенным и неизбежным этапом в истории ЭВМ, а именно переходом их из разряда полуэкзотических научных инструментов для решения особо сложных задач в разряд инструментов, обслуживающих массовых (и весьма разнообразных) потребителей.

Совершенствование компьютеров и способов их применения требует решения многих специфических проблем как фундаментального, так и чисто прикладного характера. О решении некоторых проблем, связанных с созданием и использованием ЭВМ, рассказывается в публикуемой ниже статье Председателя научного совета по вычислительной технике и системам управления Государственного комитета Совета Министров СССР по науке и технике и Президиума АН СССР академика В. М. Глушкова.

Проблема автоматизации сложных вычислений привлекла к себе внимание ученых уже давно. Однако лишь около 30 лет назад она впервые нашла себе достаточно полное решение в связи с созданием универсальных электронных вычислительных машин — *компьютеров*. Мы будем рассматривать развитие вычислительных систем именно этого класса, хотя и в более ранний период существовали специализированные вычислительные устройства, автоматизировавшие отдельные классы вычислительных процессов.

Первый советский компьютер(МЭСМ) был создан в Академии наук УССР в Киеве под руководством академика С. А. Лебедева в 1951 году. При создании МЭСМ были независимо переоткрыты основные принципы, на которых были построены первые американские и английские компьютеры, — так называемые *принципы фон Неймана*.

*) «Правда», 7/VI 1977 года.

Во-первых, это *наличие оперативной памяти*, разбитой на одинаковые ячейки. Каждая ячейка предназначена для запоминания одного *машинного слова*, представляющего собой упорядоченный набор двоичный цифр 0 и 1. Ячейки памяти снабжены *адресами*, в качестве которых выступают последовательные целые неотрицательные числа 0, 1, ..., $n - 1$; число ячеек n — *объем памяти*.

Следующий принцип — *наличие специального арифметико-логического устройства* (АЛУ), предназначенного для выполнения простейших операций над словами, в частности, *операции сравнения* с целью установления совпадения или различия двух слов. Другой класс операций составляют *арифметические операции* (сложения, вычитания, умножения и деления) над словами, рассматриваемыми как числа в двоичной системе счисления. Кроме того, имеются *операции обмена информацией* (одно машинное слово за один такт обмена) между АЛУ и памятью, а также между АЛУ и специальными вводо-выводными устройствами. Важной чертой рассматриваемого принципа является простота и элементарность системы машинных операций.

Операции управления вычислительным процессом связаны с третьим принципом фон Неймана — *командно-адресным принципом организации управления*. Машинная команда состоит из условного кода операции, которую требуется выполнить, и адресов операндов (то есть слов, над которыми выполняется операция, и результата этой операции). Например, в операции сложения $a + b = c$ имеются 3 операнда: a, b, c. Если один или несколько операндов хранятся в заранее определенных ячейках памяти или в специальных запоминающих ячейках — так называемых *регистрах* АЛУ, то адреса соответствующих операндов в команде могут опускаться. Наиболее существенным моментом третьего принципа фон Неймана является *возможность запоминания в оперативной памяти* не только операндов, но и *программы вычислительного процесса*, представляемой в виде конечной последовательности машинных команд, записанных двоичными кодами.

Команды программы обычно располагаются в последовательных ячейках памяти и выбираются из нее специальным *устройством управления* (УУ) последовательно одна за другой и исполняются по одной за один раз. Однако такая последовательность исполнения команд может нарушаться специальными *командами перехода*, когда адрес следующей команды определяется управляющей командой.

Четвертый принцип состоит в *неизменности структуры связей между устройствами*.

Вместе с первыми компьютерами возникла и *задача программирования*, то есть представления в виде последовательности машинных команд тех или иных вычислительных процедур или других процессов преобразования дискретной информации (совокупностей машинных слов).

Рассмотрим задачу программирования для простейшей задачи нахождения факториала $n!$ заданного натурального числа n. Для хранения операндов нам потребуется четыре ячейки памяти, в качестве которых мы выберем ячейки с адресами 0, 1, 2, 3. Для упрощения опустим программу ввода исходных данных и предположим, что к моменту начала работы программы в нулевой ячейке хранится число n, а в первой, второй и третьей ячейках — единицы. Тогда программа вычисления факториала представится следующей программой (числа слева представляют собой адреса ячеек, в которых хранятся соответствующие команды; через (i) обозначено содержимое ячейки с адресом i):

4. *Сравнить* (2) *с* (0) *и, если «равно», то на* 8, *иначе на следующую команду.*
5. *Прибавить* (3) *к* (2), *результат заслать в* 2.
6. *Умножить* (2) *на* (1), *результат заслать в* 1.
7. *Перейти к* 4.
8. *Останов.*

Первая команда программы (с адресом 4) представляет собой так называемую *команду условного перехода*, а четвертая (с адресом 7) — *команду безусловного перехода*. Заметим, что

одну команду перехода можно было бы сэкономить, но для дальнейшего нам удобна именно эта запись. Представляя каждую операцию двоичным кодом:

сравнение	001
сложение	010
умножение	011
переход	100
останов	101,

а адреса ячеек от 0 до 8 соответствующими четырехзначными двоичными кодами, запишем программу в закодированном виде (символом ~ обозначены неиспользуемые адреса):

001 0010 0000 1000
010 0011 0010 0010
011 0010 0001 0001
100 0100 ~ ~
101 ~ ~ ~

Заметим, что программа будет работать правильно только тогда, когда она помещена в заданные выше ячейки (от 4-й по 8-ю).

Легко понять, что описанный способ программирования (в машинных кодах) чрезвычайно громоздок и утомителен, в силу чего даже опытные программисты в сколько-нибудь сложных программах делают немало ошибок. Ошибки исправляются в процессе *отладки программы* — последовательной (команда за командой) прогонки программы для упрощенных наборов данных (в данном случае, скажем, при $n = 2$ или $n = 3$), и контроле работы машины.

Сложность задачи программирования усугубляется наличием в компьютерах запоминающих устройств (ЗУ) различных типов: *быстрых* ЗУ *относительно малого объема* (внутренних) и *более медленных* ЗУ *большого объема* (внешних).

В 1951—1955 годах программирование выполнялось в машинных кодах. Однако уже в этот период начались исследования путей упрощения программирования за счет автоматизации различных его этапов. Важным этапом явилось введение символических (буквенных) адресов в исходной записи программы с последующим выбором конкретных числовых значений для этих адресов специальной, составленной один раз программой. Возникли строгие математические постановки задач *минимизации используемого объема памяти*. Для их решения были выработаны специальные комбинаторные методы.

Введение символических адресов вместе с символическим обозначением машинных операций означало появление первых *языков программирования*, отличных от языка машинных кодов и более удобных для использования. Тем не менее языки этого класса, получившие впоследствии наименование *ассемблерных языков*, являются *машинноориентированными*, поскольку используют в качестве элементарных операторов лишь те машинные операции, которые имеются в той или иной конкретной машине.

Важной вехой в развитии программирования было введение понятия *подпрограммы* и введение в языки ассемблерного типа *оператора обращения к подпрограммам*. Само же включение подпрограммы в основную программу выполнялось в процессе трансляции исходной записи программы в окончательное (машинное) представление с помощью специальной программы, — так называемого *ассемблера*.

Новый шаг вперед на пути упрощения программирования был сделан в результате создания *процедурно-ориентированных универсальных языков программирования* и соответствующих *трансляторов*. Подобные языки не привязываются к особенностям выполнения программ в конкретных машинах, широко используют формальный язык алгебры. Первым отечественным процедурно-ориентированным языком был так называемый *адресный язык*, разработанный в 1955—1956 годах В. С. Королюком и Е. Л. Ющенко. Важную роль в развитии теории программирования сыграл *операторный язык*, предложенный А. А. Ляпуновым в 1954 году. Программа в этом языке представляется в виде конечной последовательности операторов P_i и логических условий α_j, принадлежащих заданным множествам операторов и условий. Переходы, возникающие в результате проверки логических условий, обозначаются стрелками или специальными символами. В записанной выше про-



Академик В. М. Глушков за дисплеем ЭВМ «МИР-2»

грамме вычисления $n!$ участвуют операторы сложения P_1, умножения P_2, останова P_3 и логическое условие α — условие равенства содержимого нулевой и второй ячеек. Программа в операторном языке запишется в следующем виде:

$$S = \rceil \alpha \lceil P_1 P_2 \lceil \; \rceil P_3.$$

Наличие относительно простой формы записи программы поставило вопрос о *формальных преобразованиях программ.* Разработкой теории таких преобразований много и успешно занимались Ю. И. Янов, А. П. Ершов и другие советские математики.

Важным шагом в теории вычислительных систем было становление в начале 50-х годов понятия *конечного автомата.* Это устройство, которое может находиться лишь в одном из состояний a_i, образующих конечное множество, может переходить из одного состояния в другое под действием приходящих в определенные моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ входных сигналов x_j, образующих также конечное множество, и может выдавать выходные сигналы y_k, являющиеся функциями пары (a, x) состояния и входного сигнала.

Наряду с аппаратом булевой алгебры теория автоматов составила формальный аппарат, с помощью которого стало возможным формализовать, а впоследствии и автоматизировать значительную часть труда по проектированию вычислительных систем. В виде конечного автомата оказалось возможным представить любую программу (как машинную, так и операторную).

В 60-е годы шло дальнейшее развитие вычислительных систем и программирования. Высказанная автором еще в 1958 году идея о повышении уровня машинного языка нашла свое воплощение в миникомпьютере «МИР-1» (1965 г.), а затем в еще более продвинутой форме в машине «МИР-2» (1969 г.). В машине «МИР-2» внутренний язык особенно богат. Он позволяет оперировать не только с целыми числами и десятичными дробями, но и с обыкновенными дробями, а также с формулами, использующими

элементарные функции (логарифм, синус и др.) и операции дифференцирования и интегрирования.

Благодаря богатству внутреннего языка процесс трансляции программ со входного языка на машинный практически исчез. Специальное многоуровневое устройство управления обеспечивает быструю интерпретацию сложных операторов (например, операторов аналитического дифференцирования и интегрирования), благодаря этому «МИР-2» при выполнении формульных преобразований успешно состязается в скорости работы с гораздо более мощными компьютерами, построенными по традиционной неймановской схеме.

Повышение уровня машинного языка означает фактически отказ от второго принципа фон Неймана. После машин серии «МИР» по этому пути пошла американская фирма «Барроуз», а в 70-е годы это направление стало общепринятой линией развития вычислительных систем. Другое направление, получившее широкое развитие в 60-е годы, — *создание специальных систем программ* (так называемых *операционных систем*) для управления вычислительным процессом и упрощения программирования в части, касающейся использования сложных иерархических систем памяти.

Компьютеры в этот период превратились в сложные вычислительные системы, объединяющие многие десятки различных устройств, в том числе разнообразные вводо-выводные устройства и устройства внешней памяти. Организовывает эффективную согласованную работу всех этих устройств одна из важнейших программ операционной системы — *машинный диспетчер*. Каждое из устройств работает в своем темпе, диспетчер же согласует их работу, организовывая связи между устройствами и соответствующие информационные обмены. В результате появилась возможность *мультипрограммирования*, то есть одновременной загрузки в систему не одной, а многих программ и их параллельного исполнения по командам диспетчера: в то время, когда центральный процессор ведет счет по одной программе, другие программы могут осуществлять операции ввода и вывода, поиска информации во внешней памяти (занимающего особенно много времени) и т. п.

Таким образом, удалось в определенной мере отойти от четвертого принципа фон Неймана — неизменности структуры связей — за счет возможности оперативного отключения и подключения различного рода периферийных устройств (ввод, вывод и внешние ЗУ). Программист получил возможность не привязывать операции с периферийными устройствами к определенным единицам оборудования: их выбор и включение в соответствующий процесс осуществляет операционная система.

Специальная часть операционной системы осуществляет *управление данными*. Она не только размещает сложные системы данных по ЗУ различных видов, но и осуществляет их поиск и передачу в оперативную память. В ряде систем программы операционной системы организуют так называемую *виртуальную память*. При этом программист как бы получает в свое распоряжение кажущуюся оперативную память, равную суммарной мощности всех ЗУ системы. Фактические же пересылки необходимых данных и программных блоков в действительно оперативную память осуществляются автоматически.

Системы автоматизации программирования стали в этот период включать много входных языков, так что отдельные блоки одной и той же программы стало возможным записывать на разных языках. Увеличивающийся международный обмен программами привел к необходимости создания международных универсальных процедурно-ориентированных языков. Особо большое распространение получил язык «Алгол-60». В современных системах автоматизации программирования широко применяются и другие языки («Фортран», «PL-1» и др.).

Программисты, разрабатывающие операционные системы и системы автоматизации программирования, называются обычно *системными программистами*, в отличие от программистов, разрабатывающих при-

кладные программы в той или иной конкретной предметной области. Если во втором случае главное требование — хорошее знание программистом соответствующей предметной области, то в первом случае от программиста требуется хорошее владение всеми секретами программистского мастерства и понимание архитектуры современных вычислительных систем.

В 60-е годы в СССР сложились сильные школы системных программистов в Москве, Новосибирске, Киеве и в ряде других городов.

Хотя в принципе многие задачи оптимизации операционных систем могут быть облачены в точные математические формулировки, современная математика, как правило, не может еще их решать. Поэтому при оптимизации операционных систем и структур вычислительных систем широко используются методы *машинного моделирования*. Разработаны специальные языки, ориентированные на такое моделирование, например, язык «СЛЭНГ» (1968 г.). «Недис» (1974 г.) и др.

Важным направлением программирования со второй половины 60-х годов стало *создание пакетов прикладных программ* в различных областях применений компьютеров. Пакет — это не просто механическое объединение различных программ, но и набор специальных *сервисных программ*, облегчающих их использование, то есть небольшая специализированная операционная система с проблемно ориентированным входным языком. Пакет для формульных вычислений позволяет вводить в машину формулы в привычном для человека виде, например: $x=\sqrt{5{,}26+7{,}32\cdot 8{,}04}$, $y=\sin(\pi/16)$ и т. п.

В теории вычислительных систем автору в 1966 году удалось найти новый подход, позволивший записывать программы в виде формул в некоторой специальной алгебре, получившей наименование *алгебры алгоритмов*. В отличие от обычной школьной алгебры, в которой значения переменных принадлежат области всех вещественных чисел, в алгебре алгоритмов имеется две разные предметные области. Одни переменные (обозначаемые латинскими буквами) интерпретируются как *операторы*, отображающие некоторое заданное множество M в себя. Другие переменные (обозначаемые греческими буквами) интерпретируются как *логические условия*, принимающие на множестве M два значения: 0 и 1. Как операторы, так и условия могут быть определены не на всем множестве M, а на некоторой его части. Алгебра условий (булева алгебра) и алгебра операторов (полугруппа) изучалась уже давно. Суть идеи автора состоит во введение *смешанных операций*, в которых участвуют как условия, так и операторы. Это следующие операции:

α-дизъюнкция $(P \underset{\alpha}{\vee} Q)$,

α-итерация $\underset{\alpha}{\{P\}}$,

умножение условия на оператор $P\cdot\alpha$.

Не вдаваясь в подробное определение этих операторов, заметим лишь, что рассмотренная выше программа S может быть записана в виде α-итерации: $S=\underset{\alpha}{\{P_1P_2\}}$. Доказано, что любая программа, составленная из операторов $P_1, \ldots, P_m$ и условий $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ может быть записана в виде формулы алгебры алгоритмов с переменными $P_1, \ldots, P_m$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

В алгебре алгоритмов, как и в обычной школьной алгебре, существуют соотношения, позволяющие осуществлять эквивалентные преобразования формул, то есть преобразовывать программы, не меняя определяемого или сложного оператора (преобразования на множестве данных). Использование подобного аппарата позволило в 1969—1973 годах построить автоматизированную систему проектирования компьютеров вместе с любыми реализуемыми на них системами программ, повышающую производительность труда при проектировании в 20—30 раз.

В 70-е годы теория программирования и вычислительных систем продолжает развиваться весьма быстрыми темпами. Особенно большое внимание в этот период уделялось технологии составления и методов проверки пра-

вильности больших программ. Развились идеи так называемого *структурного программирования.* Одной из вариаций этих новых технологий программирования является развиваемый у нас в стране метод *формализованных технических заданий.* Суть его состоит в том, что для написания сложной программы создается язык крупноблочных операторов и условий, с помощью которых удается записать требуемую программу достаточно кратко. Например, при построении шахматных программ в качестве операторов могут выступать процедуры проведения пешки в ферзи против одинокого короля, мата ладьей и королем, а в качестве условий—наличие проходной пешки или открытой линии.

Затем создается новый язык с более мелкими операторами и условиями, и программа переписывается на этом языке. Строя серию таких языков и представлений, на каком-то этапе встречают полностью формализованный язык, для которого существует автоматическая система транслирования.

Важным направлением развития теории вычислительных систем в 70-е годы стала *теория многопроцессорных систем,* позволяющая распараллеливать вычислительные процессы и тем самым увеличивать суммарное быстродействие системы. Теоретический задел в области методов распараллеливания был выполнен в предыдущие годы. Особенно интенсивно эти работы развивались в Новосибирске.

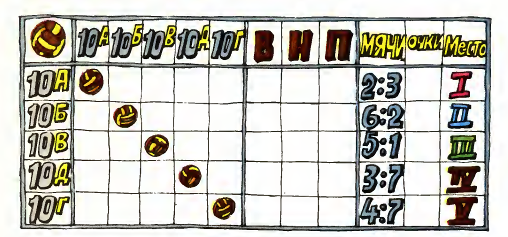
В настоящее время разработаны основные принципы построения многопроцессорных систем со многими сотнями и тысячами процессоров. При этом приходится отступать уже не от одного-двух принципов фон Неймана, а от всех четырех сразу. Подобные ненеймановские машины составят, по-видимому, основу развития вычислительной техники в ближайшем будущем.

Большой интерес представляет реализация на основе достижений современной микроэлектроники принципов обработки информации, заложенных в человеческом мозгу. Существенно, что здесь фактически стирается разница между памятью и процессорами (АЛУ), а обработка информации идет сразу по всей памяти. Тем самым обеспечивается наиболее высокий уровень распараллеливания и максимальное быстродействие системы.

Турнирная таблица

По окончании школьного футбольного турнира (в один круг) ребята вручили Степе Мошкину все записи и поручили оформить итоговую таблицу. Степа заготовил таблицу, поставил в нее команды согласно занятым ими местам и общее число забитых и пропущенных мячей, а потом пошел сам играть в футбол. Придя домой, он увидел, что младшая сестра порвала все записи, осталась только таблица. Помогите Степе ее заполнить, учитывая, что за победу Степа ставил команде 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0; при равенстве очков, набранных двумя командами, Степа ставил выше ту команду, у которой была больше разность забитых и пропущенных мячей, а если и эти разности были равны, то команду - победительницу личной встречи.

Э. Туркевич





А. Михайлов

Шестиметровый телескоп

В 1609 году Галилей впервые направил на ночное небо самодельную зрительную трубу (телескоп), составленную из двух очковых стекол, и получил увеличенное изображение небесных объектов. Эта зрительная труба давала лишь трехкратное увеличение. Уже в следующем году Галилей сделал еще два телескопа, затем еще несколько. Лучший из телескопов увеличивал в 30 раз. С этим инструментом Галилей сделал ряд замечательных открытий: он увидел четыре спутника Юпитера, обнаружил фазы у Венеры (напоминающие фазы Луны), заметил горы на Луне, и «разложил» Млечный Путь на множество слабых, невидимых простым глазом, звезд.

Что такое увеличение телескопа и от чего оно зависит? Телескоп Галилея состоял из двух основных частей: объектива (обращенного к объекту) и окуляра (обращенного к глазу). Объективом служила собирающая линза, а окуляром — рассеивающая, причем эти линзы были расположены так, что их задние фокусы совпадали. Ход лучей в таком телескопе (сейчас его обычно называют трубой Галилея) показан на рисунке 1. Параллельный пучок лучей от удаленного источника после преломления в объективе становится сходящимся, а по выходе из окуляра снова оказывается параллельным. Попадая затем в глаз наблюдателя, лучи сходятся на сетчатке глаза и дают действительное изображение источника. Угол α', под которым лучи выходят из зрительной трубы, больше угла α, который составляют с осью лучи, падающие на объектив (или непосредственно в глаз наблюдателя). Другими словами, зрительная труба увеличивает угол, под которым виден источник. Это увеличение равно (см. рис. 1).

$$K = \frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{F_1}{F_2},$$

где F_1 — фокусное расстояние объектива, а F_2 — окуляра.

Современник Галилея Кеплер заменил рассеивающий окуляр короткофокусной собирающей линзой, играющей роль лупы при рассматривании созданного объективом изображения удаленного источника. Ход лучей в трубе Кеплера приведен на рисунке 2. Преимуществом этой трубы по сравнению с трубой Галилея является то, что она дает *действительное* промежуточное изображение в фокальной плоскости объектива, куда можно поместить измерительную шкалу или фотопластинку. Увеличение трубы Кеплера, как и трубы Галилея, равно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра.

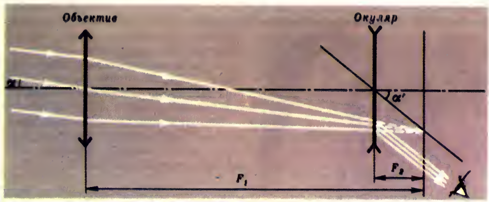


Рис. 1. Ход лучей в зрительной трубе Галилея.

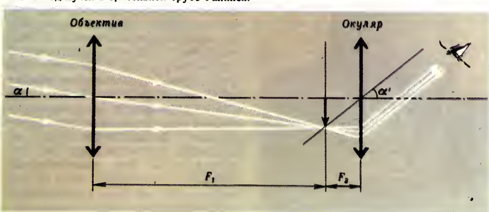


Рис. 2. Ход лучей в зрительной трубе Кеплера.

И телескоп Галнлея, и телескоп Кеплера впоследствии былн названы *рефракторами* (от латинского слова frango — ломаю). Стремление получить как можно большее увеличение привело к постройке очень длинных зрительных труб, что повлияло на качество изображения: его яркость уменьшилась. Этого можно было избежать, увеличив диаметр объектива, то есть увеличнв количество света, проходящего через телескоп *). Однако увеличение размеров объектнва приводит к резкому ухудшению четкостн изображений — они становятся расплывчатыми и с цветными каемкамн. Это связано с недостатками линз — прежде всего, со *сферической* и *хроматической аберрациями*.

Причнна возникновения первого недостатка довольно наглядно проиллюстрирована рисунком 3. Лучи, проходящие через различные участкн линзы, расположенные на разных расстояннях от оси линзы, дают изображения точечного источника, лежащие на разных расстояниях от линзы. В результате изображение светящейся точки получается в виде светлого расплывчатого пятна. Эту погрешность линзы и называют *сферической аберрацией*.

Явление *хроматической аберрации* состоит в том, что изображение, даваемое линзой, оказывается окрашенным, окаймленным цветными каемками. Эта погрешность возникает из-за того, что лучи разного цвета одной и той же линзой преломляются по-разному — фнолетовые лучи сильнее, а красные слабее (рис. 4).

Во времена Галилея и Кеплера счнталось принципиально невозможным сделать объектнв свободным от сферической н хроматической аберраций. Лишь во второй половине XVIII века был найден способ нзбавиться от этнх недостатков, сделав

*) Кстатн сказать, собрать как можно больше света, ндущего от небесного объекта,— одно нз основных назначеннй телескопа.

объектив составным из двух различных линз *). Однако трудности получения однородных и оптически совершенных стекол остались.

Для устранения хроматической аберрации англичанин Грегори в 1663 году предложил использовать в качестве объектива не линзу, а вогнутое зеркало, которое совершенно свободно от хроматизма, так как, по выражению Ньютона, «угол падения равен углу отражения для всех цветов». Причем, чтобы избавиться и от сферической аберрации, отражающая поверхность зеркала должна иметь форму параболоида вращения, который собирает в одну точку пучок лучей, параллельных оси параболоида. Довольно скоро научились шлифованием придавать зеркалу нужную форму. Однако еще долго не умели покрывать поверхность стекла отражающим свет слоем серебра, и зеркала делались из специального сплава меди с оловом, который хорошо полируется и имеет достаточную отражательную способность. В качестве окуляра предлагалось использовать собирающую линзу.

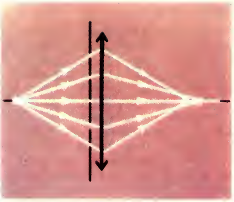


Рис. 3. Возникновение сферической аберрации.

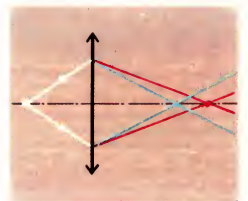


Рис. 4. Хроматическая аберрация.

Грегори не удалось сделать предложенного им зеркального телескопа — *рефлектора*, получившего название от латинского reflecto — загибаю назад. Его сделал в 1668 году Ньютон, но лишь в 1722 году Джон Хадлей в Англии, а затем Шорт в Эдинбурге начали изготовление параболических рефлекторов, которые не уступали самым большим рефракторам того времени.

С тех пор началось соревнование между двумя принципиально различными конструкциями телескопов — между рефракторами и рефлекторами. Рефракторы было делать труднее: во-первых, приходилось шлифовать у двух линз четыре поверхности и, во-вторых, предъявлялись более высокие требования к материалу — оптически однородному стеклу. Лишь в 1824 году знаменитый оптик Фраунгофер в Мюнхене сделал для обсерватории в Дерпте (ныне Тарту в Эстонии) рефрактор с диаметром объектива 9 дюймов (24 см), а его преемник Мерц в 1839 году изготовил для Пулковской обсерватории 15-дюймовый объектив. Самый большой объектив в 40 дюймов (104 см) был сделан в 1896 году А. Кларком в США, и с тех пор еще никому не удалось увеличить размеры рефракторов.

Меньшие трудности встречались при постройке больших рефлекторов. Особые заслуги в этом принадлежат англичанину Вильяму Гершелю, который в 1774—1789 годах сделал несколько рефлекторов; наибольший из них имел объектив с диаметром 120 см при фокусном расстоянии 12,5 м (рис. 5). С помощью собственноручно изготовляемых телескопов он открыл планету Уран, ряд туманностей и звездных скоплений и исследовал строение галактической системы. Еще больший рефлектор построил в середине прошлого века лорд Росс в Англии. Зеркало этого телескопа име-

*) Более подробно об исправлении недостатков линз можно прочитать, например, в «Элементарном учебнике физики» под редакцией академика Г. С. Ландсберга.

ло диаметр 185 см и фокусное расстояние 16 м.

Если по оптическим параметрам рефлекторы намного превосходили рефракторы, то по удобству наблюдений и разносторонности применений они им сильно уступали. Более легкие и менее громоздкие рефракторы уже давно стали снабжаться специальной монтировкой, в которой одна из двух взаимно перпендикулярных осей устанавливалась параллельно оси мира. Равномерное вращение вокруг этой оси со скоростью один оборот в сутки позволяет следить за видимым движением звездного неба и все время удерживать в поле зрения наблюдаемый объект. Другая ось служит для того, чтобы направлять телескоп в любую точку небосвода.

Что касается рефлекторов, то из-за огромных размеров и веса они монтировались гораздо проще и могли применяться для наблюдений лишь вблизи меридиана, поворачиваясь самым примитивным образом с помощью блоков и канатов; наблюдателям же приходилось громоздиться на крайне неудобных помостах. Кроме того, недостатком рефлекторов было потемнение металлических зеркал от атмосферных воздействий, что требовало повторной трудной полировки.

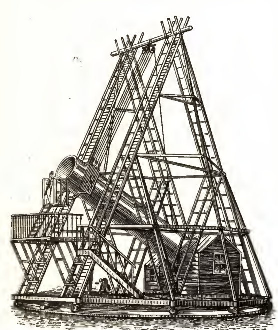


Рис. 5. Большой рефлектор Гершеля.



Рис. 6. 2,5-метровый рефлектор на обсерватории Маунт Вильсон.

Таким образом, рефракторы не сдавали своих позиций и применялись там, где требовалось производить точные угловые измерения — в меридианных инструментах для определения сферических координат звезд, при микрометрических измерениях, например, двойных звезд, а позже — для фотографирования звездного неба.

Новое возрождение получили рефлекторы в шестидесятых годах прошлого века, когда германский химик Либих нашел способ покрывать стекло тончайшим слоем блестящего серебра. Тогда же французский физик Фуко начал делать зеркала рефлекторов из стекла с последующим серебрением отражающей поверхности. Такие зеркала были гораздо легче металлических, что позволило и для них применять специальную монтировку. В случае потускнения серебряный слой легко смывался азотной кислотой, и зеркало вновь серебрилось химическим способом без дополнительной полировки.

В результате с конца прошлого века началось быстрое освоение рефлекторов. Одним из первых был установленный в 1895 году 36-дюймовый (92 см) Кросслеевский рефлектор Ликской обсерватории в США, с которым был получен ряд замечательных фотографий множества туманностей, звезд-



Рис. 7. 5-метровый рефлектор, установленный на горе Паломар.



Рис. 8. Башня 5-метрового рефлектора на горе Паломар.

ных скоплений и Млечного Пути. Затем в 1908 году последовал 60-дюймовый (152 см) рефлектор на горе Вильсон (Маунт Вильсон) в Калифорнии. Такие большие зеркала, несмотря на значительную толщину (достигающую $^1/_8$ доли диаметра), заметно прогибаются под влиянием собственного веса при разных наклонах к горизонту. Для устранения этого вредного явления была придумана так называемая разгрузка, состоящая из многочисленных рычагов с противовесами, которые подпирают тыловую часть зеркала с силой, зависящей от наклона зеркала.

К этому времени окончательно определилась область применения больших рефлекторов. Это, с одной стороны, фотографические наблюдения наиболее слабых и удаленных объектов — туманностей (главным образом, внегалактических, находящихся на расстояниях во много десятков и сотен миллионов световых лет), а с другой стороны, фотографирование спектров для исследования физических свойств и химического состава звезд и их атмосфер. Сюда же относятся открытие и изучение спектрально-двойных звезд и вспыхивающих новых звезд. Для всех этих целей нужно собрать как можно больше света, что действительно можно сделать с помощью больших зеркал. Кроме того, для спектральных наблюдений очень важна полная ахроматичность рефлекторов.

Большие успехи, достигнутые с помощью упомянутых рефлекторов, поставили вопрос о создании еще более мощных инструментов. Так, в 1917 году вступил в строй 100-дюймовый (254 см) рефлектор тоже на обсерватории Маунт Вильсон, в установке которого было применено новшество: полярная ось оканчивалась двумя большими поплавками, наполовину погруженными в полуцилиндрические сосуды со ртутью, чем достигалось очень легкое и плавное вращение (рис. 6).

В начале тридцатых годов в калифорнийском городе Пасадена начались подготовительные работы по проектированию рефлектора вдвое большего диаметра — в 200 дюймов (508 см) и в 1946 году был закончен его монтаж на горе Паломар (в 200 км от Лос-Анжелеса, штат Калифорния) на высоте 1750 м над уровнем моря. Рефлектор (рис. 7) установлен в круглой башне под полусферическим куполом диаметром в 42 м, который имеет широкий люк, поворотом купола направляемый в нужную сторону неба (рис. 8). Что касается зеркала, то первоначально оно оказалось не-

удовлетворительной формы и его пришлось доводить местной полировкой уже в самом телескопе. К этому времени вместо серебрения был изобретен способ покрытия стекла алюминием путем испарения в высоком вакууме. Оказалось, что алюминиевый слой прочнее серебряного и очень хорошо отражает свет, особенно в его коротковолновой части. До самого последнего времени это был самый большой рефлектор в мире.

В Советском Союзе до войны самый большой рефлектор имел зеркало диаметром 1 м; он был изготовлен в Англии и находился в Симеизской обсерватории в Крыму. С ним академик Г. А. Шайн с сотрудниками выполнили ряд интересных спектроскопических исследований по движению звезд и составу звездных атмосфер. Во время войны этот инструмент погиб. Раньше наша оптико-механическая промышленность не имела опыта по изготовлению больших астрономических инструментов (особенно в отливке и шлифовке зеркал). Однако Ленинградский завод освоил это трудное дело и сделал несколько рефлекторов в 1, 1,25 и 1,5 м, а в 1960 году на новой Крымской астрофизической обсерватории Академии наук СССР завершилась установка рефлектора в 2,6 м, который и теперь остается одним из самых больших в Европе.

Удачный опыт позволил поставить еще более сложную задачу. По инициативе крупнейшего советского оптика Д. Д. Максутова был разработан план постройки рефлектора с 6-метровым зеркалом (см. заставку к статье). При этом главный конструктор Б. К. Иоаннисиани не стал копировать американские образцы, а пошел по новому, оригинальному пути. Развитие электронных вычислительных машин позволило отказаться от обычной экваториальной монтировки, а применить более простую — горизонтальную, в которой одна ось направлена вертикально, а перпендикулярная к ней — горизонтально. Это сильно упростило механическую часть конструкции и монтировку зеркала с его разгрузкой, поскольку теперь зеркало в зависимости от положения наблюдаемого объекта наклоняется только в одном направлении и не испытывает боковых наклонов. Зато осложнилось слежение телескопа за вращением небесной сферы: вместо одного равномерного движения вокруг полярной оси теперь нужно строго согласованно вращать телескоп с переменной скоростью вокруг двух осей. Кроме того, само поле зрения испытывает вращение вокруг своего центра, и поэтому при фотографировании протяженных объектов кассетную часть с фотопластинкой приходится вращать тоже неравномерно. Эти сложные движения удалось осуществить с помощью электронных машин, которые пересчитывают координаты наблюдаемой точки неба, определяют скорости их изменений и дают соответствующие команды движущим телескоп моторам (подвижная часть телескопа имеет массу почти 700 тонн).

Главное зеркало телескопа диаметром 6 м было отлито и обработано на стекольном заводе под Москвой, для чего там были сооружены два специальных цеха. После отливки из особого сорта стекла с малым коэффициентом расширения, раскаленная масса медленно охлаждалась с электрическим подогревом во избежание возникновения вредных напряжений, которые обычно приводят к разрыву стеклянного блока. Такой процесс «отжига» обычно продолжается не меньше года, лишь после чего можно узнать, удалась отливка или нет.

Огромная и сложная монтировка телескопа была выполнена на оптико-механическом заводе в Ленинграде при участии ряда других ленинградских заводов тяжелого машиностроения. В результате получился инструмент, по габариту и массе соответствующий самым большим металлическим конструкциям, а по точности и тонкости не уступающий технике микроскопа.

Отшлифованное зеркало имеет фокусное расстояние 24 м; на таком расстоянии перед зеркалом образуется изображение наблюдаемого объекта. Сюда нужно поместить фотопластинку или другой светоприемник, которые, таким образом, окажутся на пути световых лучей, идущих от объекта к зеркалу. Здесь же на распорках висит небольшая кабина в форме ци-

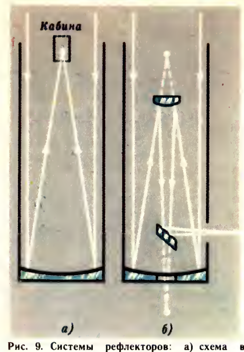


Рис. 9. Системы рефлекторов: а) схема в прямом фокусе; б) схема Кассегрена.

линдра диаметром около двух метров с осью, направленной по оптической оси зеркала (рис. 9, *а*). Внутри кабины сидит наблюдатель в случае, если наблюдения ведутся непосредственно в главном фокусе. Из всего пучка света диаметром в 6 м кабина экранирует около 10%, вызывая потерю в 0,1 звездной величины.

Кроме этого, так называемого главного фокуса, можно вести наблюдения и в фокусе Кассегрена, по имени французского физика, предложившего в 1672 году поместить близ главного фокуса небольшое выпуклое зеркало, которое посылает лучи обратно в сторону главного зеркала (для этого имеющего отверстие в центре), так что они собираются позади главного зеркала (рис. 9, *б*). Эта система применяется, главным образом, для фотографирования звездных спектров. В шестиметровом телескопе для удобства наблюдений в системе Кассегрена лучи отклоняются под прямым углом в сторону дополнительным плоским зеркалом и фокусируются сбоку над удобной площадкой, где можно помещать любые светоприемники. Фокусное расстояние телескопа в этом случае достигает 190 м.

Шестиметровый телескоп установлен в круглой башне под вращающимся полусферическим куполом, широкий люк которого автоматически направляется в сторону наблюдаемой части неба. Все управление телескопом, то есть наведение на объект и слежение за ним, совершается от соответствующего пульта. В нижних этажах башни находятся лаборатории для первичной обработки результатов наблюдений, помещение с огромной вакуумной камерой для алюминирования зеркала и комнаты для отдыха наблюдателей.

Иногда спрашивают, какое наибольшее увеличение может давать шестиметровый телескоп. Такой вопрос совершенно праздный и вот по какой причине. Увеличение определяется отношением фокусного расстояния объектива, в данном случае зеркала, к фокусному расстоянию окуляра. При фокусном расстоянии зеркала 24 м употребительный окуляр с фокусным расстоянием 24 мм дает линейное увеличение в 1000 раз, а по площади в 1 000 000 раз. Однако бесполезно применять столь большие увеличения, так как неоднородность и неспокойствие воздуха настолько портят изображение, что ничего большего, по сравнению с наиболее употребительными увеличениями в 300—500 раз, не видно.

Впрочем, с большими телескопами-рефлекторами вообще не производят визуальных наблюдений, а светоприемниками являются фотопластинки или электрические фотоэлементы. Тогда важно не увеличение, а количество собранного света. Диаметр шестиметрового зеркала примерно в 1000 раз больше диаметра зрачка глаза, поэтому зеркало собирает в 1 000 000 раз больше света, что соответствует выигрышу в 15 звездных величин. Значит, если глаз видит звезды до 6-й величины, то такой телескоп «видит» звезды до 21-й величины, а при длительном фотографировании еще на 3—4 величины слабее. Именно в этом и заключается главное преимущество больших рефлекторов.

Однако при любом способе наблюдений спокойствие, однородность и прозрачность окружающего воздуха

играют главную роль и являются самым важным условием для выбора места установки телескопа. Прежде всего, необходимо устранить влияние наиболее плотных и обычно загрязненных нижних слоев атмосферы, что заставляет выбирать достаточно высокое, обычно более 1000 м над уровнем моря, место. Затем большое значение имеют окружающий рельеф и поверхностный покров. Наперед нельзя определить, где окажутся хорошие условия для установки большого телескопа, — это решается довольно продолжительными специальными исследованиями. Поэтому еще задолго до окончания постройки шестиметрового телескопа Пулковская обсерватория, первоначально курировавшая его сооружение, снарядила несколько экспедиций, которые обследовали 16 мест в южных районах Советского Союза. Кроме астро-климатических условий пришлось учитывать также возможность доставки сорокатонного зеркала и крупногабаритных частей монтировки. После трехлетних поисков и испытаний было найдено наиболее благоприятное место на Северном Кавказе, в горах, над одной из долин, параллельных долине Теберды с известным курортом. Выбранное место лежит на высоте 1700 м над уровнем моря над горной речкой Зеленчук, в 30 км от станции Зеленчукской. Оказалссь, что там бывают ночи, когда изсбражения имеют почти идеальную четкость и спокойствие. Одна ночь наблюдений в таких условиях может дать больше, чем десятки ночей с посредственным, а тем более плохим качеством изображений.

В конце 1975 года большой телескоп был принят комиссией Академии наук СССР и включен в состав Специальной астрофизической обсерватории Академии.

Итак, наибольший и самый мощный телескоп-рефлектор сооружен и находится в Советском Союзе. Естественно возникает вопрос: можно ли ожидать, что в не очень отдаленном времени будет сделан еще больший телескоп? На это приходится ответить отрицательно, поскольку современная техника открывает совсем иные, новые пути для исследования космоса. Это, прежде всего, путь, по которому уже пошли радиоастрономы — синтезирование изображений, даваемых несколькими телескопами более скромных размеров, установленными близко друг к другу или даже на некотором расстоянии один от другого. При этом сложение изображений может производиться не непрерывно, а выборочно — лишь в сравнительно редкие моменты отличной видимости и наибольшей четкости изображений, что, конечно, можно сделать только с помощью современной электронной техники.

Другой многообещающий путь — вынесение наблюдательных средств за пределы земной атмосферы: на искусственные спутники Земли и даже на Луну, где можно получить прочную основу для установки даже больших инструментов. Шаги в этом направлении уже делаются и начинают давать интересные результаты.

Сверхтяжелые элементы — не открытие, а ошибка!

В ноябрьском иомере «Кванта» за 1976 год было рассказаио о возможном открытии свертяжелых элемеитов, которые должиы стоять в таблице Меиделеева под иомерами 116, 124, 126.

Напомним, что открытие, еслн бы оио подтверднлось, поставнло бы перед физнкамн очеиь трудный вопрос: как сверхтяжелые атомы попали в образцы слюды, где оин былн обнаружены.

После того как было объявлено о предполагаемом открытнн, во многнх лабораториях занялнсь его проверкой. Хотя рентгеновскне спектры в новых опытах оказались теми же, но для них иашлось более простое объяснение. Оказалось, что все лииии этих спектров совпадают с лиииямн реитгеиовских спектров более легких элементов — скандия, олова и др., малые колнчества которых прнсутствуют в образцах.

Такнм образом, нет ннкаких основаинй прндумывать хитрые объясиения опытов. Оии объясияются вполие естественно.

Правда, остается непонятным, откуда взялнсь большие галло (их иазывают гнгантскнми). Но это уже другой вопрос. Над ним н иадо думать.

Я. Смородинский

М. Маневич, М. Слуцкин

«Линейные построения» Грассмана

«Едва обозримо число тех разнообразных областей, которыми занимался Грассман и которые он обогатил своими исследованиями. Он был не только математиком оригинальнейшего склада с сильно выраженными философскими интересами, но и физиком, занимавшимся как теоретическими, так и практическими вопросами; ему мы обязаны великолепными работами об электрическом токе, об учении о цветах и о теории гласных звуков» *).

Феликс Клейн

Наиболее значительные результаты Германа Грассмана (1809—1877), замечательного немецкого математика, собраны в его сочинении «Учение о протяженности» (1844 г.). В этой книге излагается теория многомерных пространств. Из других его работ особого внимания заслуживают так называемые «линейные построения». Они наглядны по своей идее и имеют большое значение в теории алгебраических кривых.

В настоящей заметке мы познакомим читателей с «линейными построениями» Грассмана, относящимися к плоским алгебраическим кривым.

Определения и напоминания

1. *Координатной плоскостью* называется плоскость, на которой зафиксирована *система координат*. Положение каждой точки на координатной плоскости задается двумя числами (*координатами*) — абсциссой и ординатой (см. учебник «Математика 5», п. 16).

*) Цит. по книге: Ф. Клейн «Лекции о развитии математики в XIX столетии», ч. I, М. — Л., ОНТИ, 1937 (с. 213).

2. *Графиком уравнения* $f(x, y) = 0$ называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых служат решениями этого уравнения (см. учебник «Алгебра 6», п. 23). Например, графиком уравнения $x^2 + y^2 - 4 = 0$ является окружность, а графиком уравнения $x + y - 3 = 0$ — прямая (рис. 1).

3. *Алгебраической кривой n-го порядка* называется график уравнения $P_n(x, y) = 0$, где $P_n(x, y)$ — некоторый многочлен n-й степени относительно переменных x и y. Например, прямая на рисунке 1 — кривая первого порядка, для нее $P_1(x, y) = x + y - 3$, а окружность на том же рисунке — кривая второго порядка, для нее $P_2(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ — многочлен второй степени относительно x и y.

Кривые второго порядка

О кривых второго порядка подробно рассказывалось в «Кванте» № 8 за 1977 год.

Оказывается, точки таких кривых можно строить с помощью одной линейки. Вот как строится кривая второго порядка по методу Грассмана *).

Зафиксируем на плоскости две прямые a_1, a_2 и три точки A, S, T (рис. 2). Проведем через точку S некоторую прямую l, точку ее пересечения с прямой a_1 обозначим через A_1. Теперь проведем прямую AA_1*) и точку ее пересечения с прямой a_2 обозначим через A_2. Наконец, проведем прямую A_2T, пересекающую прямую l в некоторой точке M.

Когда прямая l поворачивается вокруг точки S, точки A_1 и A_2 как-то перемещаются на прямых a_1 и a_2, а точка M движется по плоскости. Оказывается, *траектория точки M является кривой второго порядка, как*

*) Для кривой второго порядка этот метод совпадает с ранее известными (Паскаль, XVI век).

*) Если прямые l и a_1 параллельны, то прямая AA_1 проводится параллельно им (аналогично поступаем, если параллельны прямые AA_1 и a_2 и т. п.).

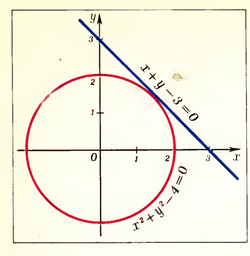


Рис. 1.

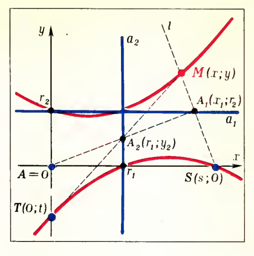


Рис. 3.

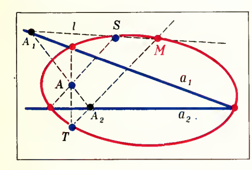


Рис. 2.

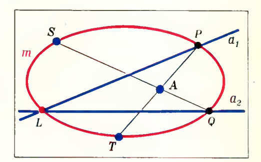


Рис. 4.

бы мы ни выбирали прямые a_1, a_2 и *точки A, S, T.*

Мы докажем этот факт для одного простого случая — когда прямые a_1 и a_2 перпендикулярны, а пары прямых SA, a_1 и TA, a_2 параллельны. Поместим начало координат в точку $O=A$, ось Ox направим по AS, ось Oy — по AT (рис. 3). Обозначим координаты точек S и T соответственно через $(s; 0)$, $(0; t)$. Пусть уравнения прямых a_1 и a_2 имеют вид $y=r_2$, $x=r_1$. Если точка M лежит на кривой, определяемой прямыми a_1, a_2 и точками A, S, T, то точки $M(x; y)$, $A_1(x_1; r_2)$ и $S(s; 0)$ должны лежать на одной прямой. Точки $M(x; y)$, $A_2(r_1; y_2)$ и $T(0; t)$ должны лежать на другой прямой, а точки $A_1(x_1; r_2)$, $A_2(r_1; y_2)$ и $A(0; 0)$ — на третьей прямой (рис. 3).

Точки M, S и A_1 лежат на одной прямой, если угловые коэффициенты прямых MS и A_1S равны (см. «Алгебра 6», п. 21 и «Алгебра и начала анализа 9», п. 52):

$$\frac{r_2}{x_1-s}=\frac{y}{x-s}.$$

Аналогичные равенства получатся для троек точек A, A_1, A_2 и M, A_2, T:

$$\frac{y_2}{r_1}=\frac{r_2}{x_1},$$

$$\frac{y_2-t}{r_1}=\frac{y-t}{x}.$$

Исключая из этих равенств x_1 и y_2, получим уравнение, которому должны удовлетворять x, y:

$$(r_2x+sy-sr_2)(tx+r_1y-r_1t)-r_1r_2xy=0$$

(s, t, r_1, r_2 у нас константы). Раскрывая скобки и приводя подобные члены, мы видим, что это уравнение — второй степени относительно x, y:

$$tr_2x^2+tsxy+sr_1y^2-sr_1(t+r_2)y-$$
$$-tr_2(r_1+s)x+tsr_1r_2=0.$$

Таким образом, все точки построенной кривой лежат на кривой второго порядка.

Итак, кривая, построенная методом Грассмана по прямым a_1, a_2 и точкам A, S, T, оказывается кривой второго порядка. Верно и обратное утверждение: *для всякой кривой m второго порядка найдутся такие прямые a_1, a_2 и точки A, S, T, что методом Грассмана по ним получается именно кривая m.*

Вот способ нахождения таких прямых и точек по кривой m. Возьмем кривую m второго порядка (рис. 4).

Зафиксируем на этой кривой три произвольные точки S, T, L. Через точку L проведем произвольные прямые a_1, a_2; пусть они пересекают m в точках P и Q, а прямые TP и SQ пересекаются в точке A. Тогда точки A, S, T и прямые a_1, a_2 определяют «по Грассману» как раз кривую m.

Способ прост, а вот доказать, что он даст именно кривую m, нелегко. Мы здесь только наметим ход доказательства.

Прежде всего надо показать, что на кривой, определяемой прямыми a_1, a_2 и точками A, S, T, лежат точки S, T, L, P и Q*). Эти же точки лежат и на исходной кривой m, то есть построенная нами «кривая Грассмана» имеет с кривой m уже пять общих точек. А дальше надо показать, что пять точек определяют не более одной кривой второго порядка. Проще всего это сделать с помощью уравнений.

Уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Все три коэффициента A, B, C не могут одновременно равняться нулю, так как тогда это уравнение определит кривую первого порядка — прямую линию. Допустим, что $C\neq 0$. Тогда левую часть этого уравнения можно разделить на коэффициент C, в результате получим уравнение

$$A_1x^2+B_1xy+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$$

где $A_1=A/C$, $B_1=B/C$ и т. д.

Если в полученное уравнение подставлять вместо x, y координаты точек S, T, L, P, Q, то получится система из пяти линейных уравнений относительно коэффициентов A_1, B_1, D_1, E_1, F_1. А такая система при условии, что никакие три точки из S, T, L, P, Q не лежат на одной прямой, имеет единственное решение.

Кривые высших порядков

Для кривых третьего порядка метод Грассмана состоит в следующем. На плоскости задаются точки S («вход»), T («выход») и два набора («блока»), каждый из которых состоит из двух прямых и одной точки: a_1, A, a_2 и b_1, B, b_2 (рис. 5). Затем для некоторой точки M плоскости производится такое построение: проводится прямая MS и находится точка A_1 ее пересечения с прямой a_1, затем проводится прямая A_1A и находится точка A_2 ее пересечения с прямой a_2, после

*) Например, если $M=L$, то $A_1=(SM)\cap a_1=L$, $(AA_1)\cap a_2=L$ и $(TA_2)\cap(MS)=L$; аналогично проверяются остальные точки.

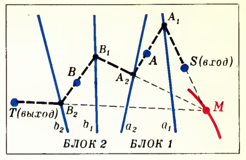


Рис. 5.

этого проводится прямая MA_2 и находится точка B_1 ее пересечения с прямой b_1, дальше так же находится точка B_2 и проводится прямая MB_2. Если эта прямая проходит через «выход» (точку T), то точка M принадлежит кривой, а если не проходит, то не принадлежит. (Терминология вполне естественная: «войдя» на рисунке 5 во «вход», мы «вышли» через «выход».)

Заметим, что при построении кривой второго порядка (см. рис. 2) точка M участвует в построении два раза, а при построении кривой третьего порядка (рис. 5) — три раза.

Описанные построения Грассман назвал *линейными*. Эти построения были полностью исследованы Грассманом в общем случае, то есть для кривой n-го порядка. А именно, Грассман показал, что если на плоскости задать вход, выход и $n-1$ блок, то всякая точка M плоскости, удовлетворяющая схеме, изображенной на рисунке 6 (M участвует в линейных построениях ровно n раз), принадлежит некоторой кривой n-го порядка. И обратно, любая алгебраическая кривая n-го порядка укладывается в схему рисунка 6, то есть можно так за-

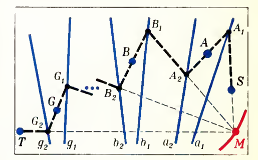


Рис. 6.

дать вход, выход и $n-1$ блоков, что по ним получится как раз заданная кривая n-го порядка.

Вы видите, что между кривыми второго порядка и более высокого — третьего, четвертого и т. д. — существует большое различие в реализации построений Грассмана. Кривую второго порядка «по Грассману» можно непосредственно построить (см. рис. 2) как траекторию некоторой точки, а для кривых третьего порядка метод Грассмана позволяет лишь проверять, принадлежит ли алгебраической кривой данная точка M плоскости или нет. Такое различие метода Грассмана для $n=2$ и $n \geqslant 3$ — не случайное.

Построения Грассмана проводятся одной линейкой. Если бы, задав прямые и точки, соответствующие, например, кривой $x^3-2y^3=0$, мы смогли бы построить хотя бы одну точку этой кривой, отличную от O (0; 0), то отношение x/y было бы равно $\sqrt[3]{2}$. А такую величину циркулем и линейкой построить невозможно.

Планиметрические произведения Грассмана

Все приведенные построения описываются Грассманом в следующей последовательности:

MS — прямая, проходящая через точки M и S;

MSa_1 — точка пересечения прямых MS и a_1;

MSa_1A — прямая, соединяющая точки MSa_1 и A и т. д.

Для кривой второго порядка прямая MSa_1Aa_2T должна проходить через точку M. Этот факт Грассман записывает в следующем символическом виде:

$$(MSa_1Aa_2T)\ M = 0.$$

Выражение, стоящее в левой части этого «уравнения», Грассман называет *планиметрическим произведением*, а само уравнение — *экстенсивным*. Экстенсивное уравнение кривой n-го порядка по Грассману имеет вид

$$(MSa_1Aa_2Mb_1Bb_2M \ \ldots \ \ldots\ Mg_1Gg_2T)M=0.$$

Вид уравнения показывает, сколько раз точка M встречается в построениях. Сами планиметрические произведения обладают рядом интересных свойств, которые Грассман также подробно изучал. В терминах планиметрических произведений результат Грассмана может быть сформулирован следующим образом: *если точка M входит в экстенсивное уравнение n раз, то координаты этой точки удовлетворяют алгебраическому уравнению n-й степени*. Обратно, *координаты точек всякой алгебраической кривой n-го порядка удовлетворяют уравнению $G=0$, где G — некоторое планиметрическое произведение, содержащее n раз точку M*.

«Эта теорема, — писал Ф. Клейн,— может быть положена в основу такого построения теории алгебраических кривых, проще которого вряд ли что можно придумать».

Описанные построения были обобщены Грассманом на случай трехмерного пространства. В трехмерном пространстве речь шла о стереометрических произведениях и соответствующих им «линейных построениях» точек алгебраических поверхностей.

Графическая реализация метода Грассмана

Еще Ф. Клейн заметил, что метод Грассмана можно рассматривать как механизм, позволяющий вычерчивать кривые. В точках M, $A_1, A_2, \ldots, G_2$ на прямые надо «одеть колечко», в точках $S, A, B, \ldots, T$ — сделать шарниры и т. п. Такие механизмы существуют для кривых второго и третьего порядков.

Линейные построения Грассмана могут быть полезными и при использовании ЭВМ и графопостроителей *). Действительно, можно написать программу, в которой будут реализованы две операции: проведение прямой через две точки и нахождение точки пересечения двух прямых. По этой программе ЭВМ будет определять координаты точек некоторой алгебраической кривой и выдавать их на печатающее устройство или непосредственно на графопостроитель в виде соответствующей команды для движения пера (просмотр точек плоскости проводится как в телевизоре — по строчкам с заданной степенью точности).

*) О графопостроителях мы писали в статье «ЭВМ в конструкторском бюро» («Квант», 1976, № 9).



В. Майер

Интерференционный опыт Брюстера

Экспериментальная установка

В 1817 году английский физик, член Лондонского королевского общества Д. Брюстер (1781—1868) обнаружил, что если две плоскопараллельные стеклянные пластинки одинаковой толщины расположить почти параллельно друг другу, то, глядя сквозь них, можно наблюдать интерференционную картину.

Оптическая схема опыта Брюстера изображена на рисунке 1. Свет, падая от лампы накаливания S на лист белой бумаги $Б$, рассеивается на нем и, проходя через плоскопараллельные пластинки P_1 и P_2, попадает в глаз $Г$ наблюдателя. Интерференционная картина видна на черном фоне непрозрачного экрана $Э$.

Чтобы повторить опыт Брюстера, нужно в первую очередь подобрать подходящее стекло: пластинки P_1 и P_2 должны быть плоскопараллельны и установлены параллельно друг другу. Стекло толщиной около 7 мм, которое часто используется для изготовления зеркал и витрин магазинов, наиболее доступно и нередко вполне пригодно для постановки тонких интерференционных экспериментов. Достав кусок такого стекла, расположите его перед глазом так, чтобы в нем на светлом фоне отражался какой-либо темный предмет с четкими границами (например, на фоне дневного неба отражалась рама оконного переплета). Сфокусируйте (аккомодируйте) глаз на поверхность стекла так, чтобы была видна граница изображения темного предмета. Если при этом ровные края предмета видны слегка волнистыми или «размытыми» в каких-то местах, то, значит, поверхности стекла не гладкие и такое стекло не годится для опытов. Обычно удается подобрать стекло, поверхности которого настолько гладкие, что граница между изображением темного предмета и светлым фоном выглядит вполне резкой. Именно такое стекло следует использовать в опытах.

Из отобранного стекла твердосплавным или алмазным стеклорезом вырежьте кусок размером примерно 80 × 70 мм и разрежьте его пополам, так, чтобы получились две пластинки P_1 и P_2 размером 40 × 70 мм. Эти пластинки, очевидно, имеют с достаточно высокой точностью одинаковую толщину вблизи линии разреза. Приготовьте также третью стеклянную пластинку C такой же толщины, как и две первые, размером 30 × 40 мм.

Чтобы при работе не пораниться об острые края пластинок, отшлифуйте их (смочите их водой и обработайте на абразивном бруске или круге). Старайтесь при этом не поцарапать поверхности пластинок. Обработанные стеклянные пластинки вымойте водой, насухо протрите чистой мягкой тряпочкой и удалите с их поверхностей оставшиеся пылинки и ворсинки.

Для успешной постановки описанных ниже опытов соберите специаль-

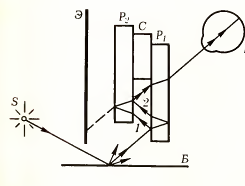


Рис. 1.

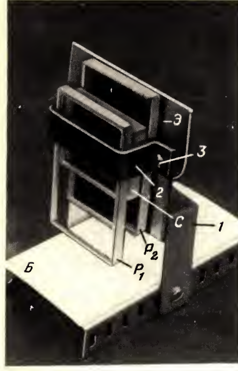


Рис. 2.

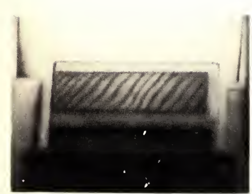


Рис. 3.

ный прибор, устройство которого вполне понятно из приведенной на рисунке 2 фотографии. Стеклянные пластинки P_1, P_2, C закреплены на алюминиевой стойке 1 прибора скобой 2 из винипласта или жести. В качестве экрана $Э$ использован расположенный за пластинкой P_2 листок черной бумаги. Источник (лампу накаливания) поместите за экраном $Э$. При сборке прибора расположите пластинки P_1 и P_2 так, чтобы их области, близкие к линии разреза aa', оказались рядом. Угол между пластинками можно отрегулировать болтами 3 и перемещением пластинки C вверх или вниз.

При включенном источнике посмотрите на нижние части пластин. На черном фоне экрана вы увидите несколько широких горизонтальных полос различной яркости. Слегка изменяя угол между пластинами, можно отрегулировать его так, что одна из ярких горизонтальных полос покроется почти вертикальными интерференционными полосами.

На рисунке 3 приведена фотография интерференционных полос Брюстера, полученная в белом свете. Эта фотография, конечно, не идет ни в какое сравнение с тем прекрасным явлением, которое можно наблюдать непосредственно глазом.

Немного теории

Пусть на плоскопараллельную стеклянную пластинку толщины d под некоторым углом φ падает световой луч (рис. 4). В результате многократных отражений и преломлений света на поверхностях пластинки из нее выйдет множество параллельных и равноотстоящих друг от друга лучей. Ясно, что интенсивность каждого последующего луча, выходящего из пластинки, меньше интенсивности предыдущего и быстро уменьшается с увеличением порядкового номера луча. Поэтому из дальнейшего рассмотрения можно исключить все лучи, кроме лучей *1*, *2* и *1'*, *2'*. Нетрудно

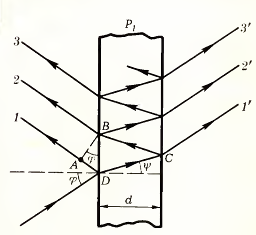


Рис. 4.

видеть, что эти пары лучей в общем-то эквивалентны, следовательно, достаточно проанализировать «поведение» лучей *1* и *2*.

Лучи *1* и *2*, которые указывают направления распространения световых волн, получились из одного луча, падающего на пластинку. Следовательно, они когерентны. А это означает, что световые волны, идущие в направлениях этих лучей, будучи сведены вместе, должны интерферировать.

Вычислим разность хода между лучами *1* и *2*, возникающую после прохождения первой пластины (рис. 4). Проведем из точки B отрезок AB, перпендикулярный к этим лучам. Разность путей, проходимых когерентными волнами от точки их образования D до точек B и A (идущие дальше в бесконечность волны дополнительной разности хода не приобретают), равна геометрической разности хода

$$\delta = DC + CB - AD = 2DC - AD.$$

Если стеклянная пластинка имеет показатель преломления n, то световая волна проходит путь DCB в стекле со скоростью, в n раз меньшей скорости света в воздухе, двигаясь в котором она за то же время прошла бы расстояние $2n \cdot DC$. Кроме того, при отражении света в точке D от оптически более плотной среды происходит «потеря полуволны» (изменение фазы отраженной волны на π). Поэтому истинная, или, как принято говорить, оптическая разность хода между когерентными волнами равна

$$\Delta = 2n \cdot DC - AD + \frac{\lambda}{2}. \qquad (1)$$

Из геометрических соображений

$$DC = \frac{d}{\cos\psi}, \quad BD = 2DC \cdot \sin\psi = 2d \cdot \frac{\sin\psi}{\cos\psi},$$

$$AD = BD \cdot \sin\varphi = 2d \cdot \frac{\sin\psi}{\cos\psi} \cdot \sin\varphi.$$

Согласно закону преломления света

$$\sin\psi = \frac{1}{n}\sin\varphi.$$

Подставляя найденные значения DC и AD в формулу (1) и учитывая закон преломления, получим

$$\Delta = 2n\frac{d}{\cos\psi} - 2d\frac{\sin\psi}{\cos\psi} \cdot \sin\varphi + \frac{\lambda}{2} = 2d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2\varphi} + \frac{\lambda}{2}. \qquad (2)$$

Максимумы интенсивности света (светлые интерференционные полосы) будут в том случае, если оптическая разность хода равна целому числу длин волн света:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \; k = 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

Проходя пластинку P_2, лучи *1* и *2* приобретают дополнительную разность хода, которая, как это следует из симметричности устройства, также определяется формулой (2). Нетрудно сообразить, что разность хода световых волн, прошедших обе пластинки и идущих в глаз наблюдателя (см. рис. 1), выражается формулой

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = 2d\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi_1} - \sqrt{n^2 - \sin^2\varphi_2}\right), \qquad (4)$$

где φ_1 — угол падения света от источника на пластинку P_1, а φ_2 — угол падения параллельных лучей *1* и *2* на пластинку P_2.

С помощью «геометрических» вычислений формулу (4) можно привести к виду

$$\Delta = \alpha d \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi}},$$

где α — двугранный угол между пластинами.

Выходящие из пластин когерентные лучи параллельны между собой, а значит, пересекаются в бесконечности и образуют интерференционную картину тоже в бесконечности. Поэтому для наблюдения картины интерференции глаз должен быть аккомодирован на бесконечность. (Если на пути лучей, выходящих из пластины P_1 после отражений, поместить собирающую линзу, то картину интерференции можно наблюдать на экране, помещенном за линзой в ее фокальной плоскости.) Фотография, помещенная на рисунке 3, подтверждает сказанное: чтобы получить резкое изображение интерференционных

полос на пленке, пришлось сфокусировать объектив фотоаппарата на бесконечность; при этом детали установки получились на фотографии не резкими.

Опыты и наблюдения

Внимательно рассмотрите получающуюся в установке Брюстера интерференционную картину. Если вы удачно подобрали стеклянные пластинки и угол между ними, то увидите почти прямые параллельные между собой разноцветные полосы, расположенные симметрично по обе стороны от центральной белой полосы. Рядом с этой белой полосой проходят две наиболее темные полосы.

Центральная белая полоса соответствует тем углам падения света на пластинки, при которых оптическая разность хода между интерферирующими волнами равна нулю. Действительно, вообще интерференционное условие максимумов интенсивности имеет вид

$$\Delta = k\lambda, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Если $k = 0$, то $\Delta = 0$ для любой длины волны. А значит, при одних и тех же углах, соответствующих $\Delta = 0$, максимумы интенсивности дадут все монохроматические волны, входящие в состав белого света. Это приведет к тому, что центральный максимум интенсивности (максимум нулевого порядка) окажется белым.

Все другие интерференционные полосы окрашены, причем красные части полос расположены дальше от центрального максимума, чем фиолетовые или синие.

Введите снизу между пластинами P_1 и P_2 полоску черной бумаги шириной 5 мм. Перемещая ее, вы можете перекрыть один из интерферирующих пучков и уничтожить тем самым интерференционную картину.

Лучше это сделать так. К краям пластинок P_1 и P_2 пластилином прикрепите расположенную между ними горизонтально или слегка наклонно полоску картона, отделяющую один из когерентных пучков от другого. Тогда, перекрывая один из пучков непрозрачной бумагой, можно добиться исчезновения картины.

Теперь вместо полоски бумаги введите в один из интерферирующих пучков полоску стекла толщиной 1—2 мм. Интерференционная картина вновь исчезнет! Попробуйте объяснить результат опыта самостоятельно.

Расположите между пластинами P_1 и P_2 небольшую спираль, изготовленную из тонкой нихромовой проволоки. Подключив концы спирали с помощью многожильных проводников к батарейке, разогрейте спираль. При этом интерференционные полосы изогнутся и примут самую причудливую форму!

Можно поставить более простой вариант этого опыта, если поднести снизу под пластинки P_1 и P_2 пламя горящей спички (пламя должно быть расположено достаточно далеко от пластинок, так, чтобы в промежуток между ними попадал лишь нагретый от пламени воздух).

Чем же объясняется результат опыта? Очевидно, при нагревании воздуха изменяется его плотность, а следовательно, и его показатель преломления. Это ведет к тому, что между когерентными пучками возникает дополнительная разность хода, и интерференционная картина смещается. Положим, что картина сместилась на k полос. Это означает, что разность хода изменилась на k длин волн света. Поскольку длина световой волны очень мала, то в опыте можно измерить очень небольшие изменения разности хода и показателя преломления воздуха.

Приборы, служащие для измерения различных физических величин с помощью интерференции света, называются оптическими интерферометрами. Они позволяют производить измерения с очень высокой степенью точности. Описанный в статье прибор для наблюдения полос Брюстера фактически является простейшим интерферометром.



А. Тоом

Решения задач ВЗМШ

В этом номере мы публикуем решения некоторых задач из вступительной работы в ВЗМШ 1977 года («Квант», 1977, № 1, с. 53).

Задача 1. *В равенстве двух дробей, числители и знаменатели которых двузначные числа, цифры заменены буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными:*

$$\frac{КУ}{РЕ} = \frac{КА}{КУ}.$$

Какую цифру означает каждая из букв (достаточно привести все возможные ответы)?

Решение. Обозначим через $\frac{y}{x}$ несократимую дробь, равную $\frac{КУ}{РЕ}$. Иными словами, пусть $\frac{КУ}{РЕ} = \frac{y}{x}$, и натуральные числа x и y не имеют общих делителей, отличных от 1. Таким образом, $РЕ = ax$ и $КУ = ay$, и в то же время $КУ = bx$ и $КА = by$. Тогда $ay = bx$, откуда, так как x и y не имеют общих делителей, $a = cx$, $b = cy$. Итак, $КУ = cxy$, $КА = cy^2$, $РЕ = cx^2$, где c, x, y — натуральные числа.
С одной стороны, $|КУ - КА| = |У - А|$ и $У \neq А$. Значит, $0 < |КУ - КА| < 10$. С другой, $КУ - КА = cy(x - y)$. Следовательно,

$$0 < cy|x - y| < 10. \qquad (1)$$

Отсюда $c < 10$. Поскольку $РЕ = cx^2$ и $Р \neq 0$, получаем $x > 1$. Аналогично заключаем, что $y > 1$. Из $y \geqslant 2$ и (1) вытекает $c < 5$. Итак, $1 \leqslant c \leqslant 4$. Рассмотрим сначала возможности $c = 2, 3, 4$. Учитывая отсутствие общих делителей у x и y и неравенство (1), получаем для c, y и x девять вариантов (см. таблицу). Проверка показывает, что ни один из этих вариантов не подходит. Пусть теперь $c = 1$. Неравенство (1) принимает вид

$$0 < y|x - y| < 10. \qquad (2)$$

Поскольку $КА = y^2$, $РЕ = x^2$, имеем $4 \leqslant x \leqslant 9$ и $4 \leqslant y \leqslant 9$. Из $y \geqslant 4$ и (2) следует $0 < |x - y| \leqslant 2$. Значит, $|x - y| = 1$ или $|x - y| = 2$. Покажем, что $|x - y| \neq 2$. Если $y \geqslant 5$, то из (2) $|x - y| < 2$. Если же $y = 4$ и $|x - y| = 2$, то $x = 6$ — противоречие с отсутствием общих делителей у x и y. Итак, $|x - y| = 1$. Следовательно, $4 \leqslant x \leqslant 8$ и $y = x + 1$ или $5 \leqslant x \leqslant 9$ и $y = x - 1$. Проверка всех 10 вариантов дает три возможных ответа:

1) КУ = 20, КА = 25, РЕ = 16;
2) КУ = 30, КА = 36, РЕ = 25;
3) КУ = 42, КА = 49, РЕ = 36.

c	y	x
4	2	3
3	2	3
3	3	2
3	3	4
2	2	3
2	3	2
2	3	4
2	4	3
2	4	5

Задача 3. *Дополните табличку* 4×4 (рис. 1) *буквами* В, З, М, Ш, *обведите их рамками четырех типов (квадрат, ромб, круг, треугольник) и раскрасьте их в четыре цвета так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) в каждой строчке и в каждом столбце должны встречаться все буквы, цвета и типы рамок; 2) каждая буква должна быть раскрашена по разу каждым цветом; 3) рамка каждого типа должна содержать каждую букву и каждый цвет.* (*Достаточно нарисовать требуемую картинку.*)

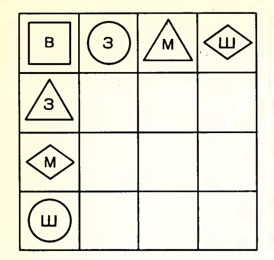


Рис. 1.



Рис. 2.

Решение. См. рисунок 2. Общая теория, помогающая решать задачи такого рода, развита в статье Л. Беве («Квант», № 6 за 1976 г.).

Задача 5. *Найдите все решения системы уравнений:*

$$\begin{cases} x^2 = y + z, \\ y^2 = z + x, \\ z^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Решение. Вычтем второе уравнение из первого:

$$x^2 - y^2 = y - x$$
$$(x - y)(x + y + 1) = 0.$$

Рассмотрим два случая.

I. $x = y$. Система принимает вид

$$\begin{cases} x^2 = x + z, \\ z^2 = 2x^2. \end{cases}$$

Следовательно, $z = x(x - 1)$ и $x^2(x - 1)^2 = 2x^2$. Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = 1 - \sqrt{2}$. Мы получаем такие три ответа: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 1 + \sqrt{2}$, $z = 2 + \sqrt{2}$ и $x = 1 - \sqrt{2}$, $y = 1 - \sqrt{2}$, $z = 2 - \sqrt{2}$.

II. $x + y + 1 = 0$. Сложим все три уравнения исходной системы;

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + x + y + 2z,$$
$$z^2 - 2z = x + y.$$

Подставим сюда -1 вместо $x + y$: $(z - 1)^2 = 0$, $z = 1$.

Тогда из первого уравнения $x^2 = y + 1$, а поскольку $x + y + 1 = 0$, $x^2 + x = 0$. Получим еще два ответа: $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$; $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

Задача 6. *Даны две непересекающиеся окружности. Существует ли вне окружностей такая точка, что всякая прямая, проходящая через нее, пересекает хотя бы одну из окружностей.*

Решение. Будем предполагать, что окружности расположены так, как на рисунке 3, *а* (если они расположены так, как на рисунке 3, *б*, то такой точки, очевидно, не найдется). В этом случае искомая точка существует. Такой будет любая внутренняя точки «треугольника» MKP, где MK — общая внутренняя касательная, KP — общая внешняя касательная, MP — дуга окружности. Докажите сами, что любая прямая, пересекающая MK или KP, пересекает хоть одну из наших окружностей.

Задача 7. *Автомобиль и велосипедист выехали одновременно из А в В. Проехав треть пути, велосипедист остановился и тронулся лишь тогда, когда автомобилю оставалось треть пути до В. Автомобиль, доехав до В, без остановки поехал обратно в А. Кто приедет раньше: автомобиль в А или велосипедист в В?*

Решение. Проехав треть пути, велосипедист остановился и ждал, пока автомобиль проедет две трети пути. Значит, велосипедист проехал

треть пути быстрее, чем автомобиль — две трети. Поэтому скорость велосипедиста составляет более половины скорости автомобиля. Посмотрим теперь, что происходит после того, как велосипедист снова трогается в путь. Ему остается две трети расстояния от A до B. Автомобилю же остается четыре трети этого расстояния: одна треть туда и целый путь от B до A обратно. Таким образом, велосипедисту предстоит проехать вдвое меньше, чем автомобилю; по найденному выше, велосипедист приедет раньше.

З а д а ч а 9. *Большой прямоугольник разбит на клетки* 1 см $\times$ $\times$ 1 см. *Внутри каждой клетки написано число. Известно, что сумма всех чисел в каждой горизонтальной строчке равна* 1, *а в каждом вертикальном столбце — равна* 2. *Может ли площадь прямоугольника равняться* 1976 см²?

Ответ: не может.

Р е ш е н и е. Докажем это от противного, то есть допустим, что площадь такого прямоугольника равна 1976 см², и придем к противоречию. Пусть число строчек равно m, а число столбиков равно n. Тогда $mn = 1976$. Вычислим двумя способами сумму всех чисел, написанных в клетках. С одной стороны, сумма чисел в каждой строчке равна 1, а строчек m, значит, сумма всех чисел равна m. С другой стороны, сумма чисел в каждом столбике равна 2, а столбиков n, значит, сумма всех чисел равна $2n$. Итак, $m = 2n$, откуда $2n^2 = 1976$, $n^2 = 988$, что невозможно при целом n.

З а д а ч а 10. *Несколько ящиков весят вместе* 10 *тонн, причем каждый из них весит не больше одной тонны. Какое наименьшее количество трехтонок заведомо достаточно, чтобы увезти этот груз?*

Ответ: 5 трехтонок.

Р е ш е н и е. Покажем сначала, что четырех трехтонок может не хватить. Так будет, например, если имеется 13 одинаковых ящиков весом по $\frac{10}{13}$ тонны. Тогда в одну трехтонку мы не можем поместить больше трех ящиков.

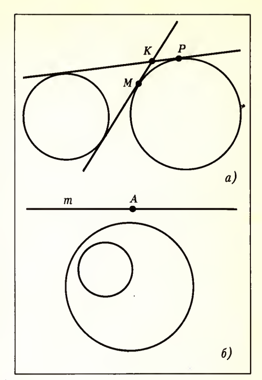


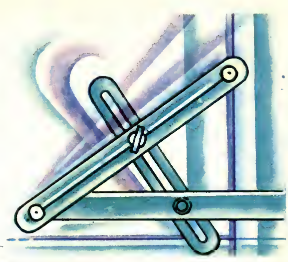
Рис. 3.

Докажем теперь, что пяти трехтонок всегда хватает. Будем грузить ящики на первую трехтонку, пока это возможно, чтобы не перегрузить ее. При этом на ней окажется более двух тонн груза. Затем грузим ящики по очереди на остальные трехтонки таким же образом. При этом все ящики окажутся погружены, так как на долю последней трехтонки останется менее двух тонн груза.

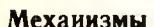
В этой задаче надо было указать количество трехтонок, достаточное при *любой* расфасовке груза. К сожалению, многие решавшие, не поняв этого, просто приводили примеры, когда груз можно увезти на четырех машинах.

В. Книжник

Построение алгебраических кривых с помощью шарнирных механизмов



Эта заметка родилась из доклада, сделанного московским школьником, учеником 9 класса Вадимом Книжником на школьной конференции. В ней рассказывается, как с помощью механизмов, состоящих из планок с прорезями и винтов, можно строить графики различных функций.



Механизмы

Шарнирным механизмом мы будем называть систему из планок с прорезями и дырками, соединенных винтами. При этом прорези и дырки располагаются строго по оси планки. При соединении винтом планки с дырками могут лишь поворачиваться вокруг винта, а планки с прорезями — поворачиваться и смещаться (рис. 1; снизу на рисунке приведены обозначения соединений).

Работают эти механизмы так. На плоскости закрепляются две перпендикулярные планки, образующие прямоугольную систему координат Oxy. К этим планкам винтами крепится механизм, имеющий один «вход» — дырку, перемещающуюся по оси Ox, и один «выход» — дырку, которая все время находится на одной вертикали со входом, но на высоте, зависящей от положения входа. Если в «выход» вставить карандаш, а «вход» вести по оси Ox, то карандаш нарисует кривую — график некоторой функции.

Для дальнейшего полезно ввести еще один блок «угол», состоящий из трех планок (с дырками), скрепленных винтами. Этот блок, привинченный теми же винтами к любым двум планкам с прорезями, позволяет им лишь смещаться, сохраняя между собой постоянный угол (обозначение на рисунке — угол).

Примеры

На рисунке 2, *а* изображен механизм со входом A и выходом B, строящий график функции $y=x$. Он основан на том, что прямоугольник, диагональ которого образует угол 45° с основанием, является квадратом. На рисунке 2, *б* изображен механизм, строящий график постоянной ($y=c$). Механизм, строящий график функции f (рис. 2, *в*), мы будем обозначать на рисунке волнистой линией, соединяющей вход A и выход B, в середине волнистой линии будем писать f в кружочке, у выхода будем ставить стрелку; а в тексте мы такой механизм будем обозначать буквой f.

Таким образом, у нас уже есть две функции. Научимся умножать, складывать, делить функции и извлекать из функций корень.

Блоки алгебраических операций

Блок сложения. По определению, назовем *блоком сложения* способ скрепления механизмов f и g, при котором точка C — выход g, — выписывает график функции $y(x) = f(x) + g(x)$. Блок сложения изображен на рисунке 3а. Ось абсцисс

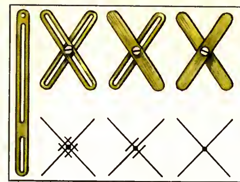


Рис. 1.

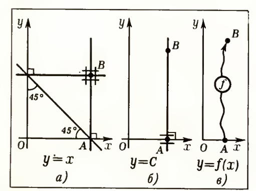


Рис. 2.

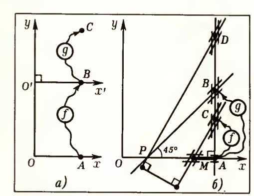


Рис. 3. *а*) Блок сложения; *б*) Блок умножения.

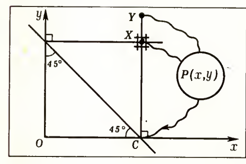


Рис. 4.

механизма g совпадает с осью $O'x'$ на рисунке, входом его является точка B — выход механизма f.

Блок умножения. Это — способ скрепления механизмов f и g, при котором выход D выписывает график функции $y(x) = f(x) \cdot g(x)$. Блок умножения изображен на рисунке 3б. Здесь $|AM| = 1$, $(PD) \parallel (CM)$, поэтому

$$\frac{|AD|}{|AP|} = \frac{|AC|}{|AM|}.$$

Но $|AP| = |AB|$, $|AM| = 1$, отсюда $|AD| = |AC| \cdot |AB| = f(x) \times \times g(x)$.

Блок деления. Этот блок получается из блока умножения, если выход f переместить в точку D; тогда в точке C получится выход механизма f/g.

Блок извлечения корня. Этот блок получается из блока умножения, если точки B и C объединить, а в точку D поместить выход механизма f, тогда в точке C получится выход механизма $\sqrt{f(x)}$. Аналогично строится блок $\sqrt[n]{f(x)}$.

Графики уравнений

С помощью описанных механизмов и блоков можно конструировать механизмы для построения графиков различных функций типа многочленов, алгебраических дробей и т. п. Можно сделать и механизм для построения графика уравнения $P(x, y) = 0$, где $P(x, y)$ — некоторый многочлен. Для этого сначала собирается механизм, изображенный на рисунке 4. Точки X и Y рассматриваются как выходы для «функций» $y = x$, $y = y$. Затем собирается механизм $P(x, y)$, входы которого — X и Y, а выход помещается в точку C (то есть находится такое положение точки Y, что выход оказывается в точке C). После этого точка Y может перемещаться только так, что для ее координат x, y будет справедливо равенство $P(x, y) = 0$. Если вставить в точку Y карандаш, то он сможет двигаться только по графику уравнения $P(x, y) = 0$.

Премии «Кванта»

За 1976—77 учебный год редакция получила большое количество писем с решениями задач из «Задачника «Кванта». Среди авторов этих писем редакция отобрала школьников, решивших наибольшее число задач и приславших наиболее оригинальные решения. Эти школьники награждаются специальной премией, учрежденной редколлегией журнала «Квант» — подпиской на журнал «Квант» на 1978 год.

1. Аронов Борис (Саратов)
2. Билер Петр (Вроцлав, ПНР)
3. Гаркавый Виктор (Лида)
4. Гисин Борис (Ленинград)
5. Ефашкин Анатолий (Оренбург)
6. Жердев Анатолий (Славянск)
7. Забродин Антон (п. Черноголовка Московской обл.)
8. Касянчук Александр (Николаев)
9. Корельштейн Леонид (Москва)
10. Кулеско Александр (Донецк)
11. Мошонкин Андрей (Кирово-Чепецк)
12. Никитенков Алексей (Великие Луки)
13. Пономарев Евгений (п. Черноголовка Московской обл.)
14. Палей Вадим (Харьков)
15. Побылица Павел (Ленинград)
16. Штейншрайбер Юрий (Баку)

За успешное участие в XI Всесоюзной физико-математической олимпиаде подпиской на журнал «Квант» на 1978 год награждаются:

1. Аболтыньш Айнарс (Рига)
2. Барпиев Бакытбек (с. Успеновка КиргССР)
3. Бернотас Андрюс (Вильнюс)
4. Ваякас Тойво (Тарту)
5. Власов Вячеслав (Киев)
6. Гусев Игорь (Воркута)
7. Ирматов Анвар (Наманган)
8. Левин Марк (Таллин)
9. Ляховец Андрей (Краснодар)
10. Пивоваров Валентин (Красноярск)
11. Таурайтис Виргилиюс (Вильнюс)
12. Хлебутин Сергей (Пермь)

Задачи

М461—М465; Ф473—Ф477

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 ноября 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М456, М457» или «Ф468». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи — просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. В этом номере «Задачник «Кванта» составлен в основном из задач, предлагавшихся на последней Всесоюзной олимпиаде.

М461. На столе стоят чашечные весы и n гирь различных масс. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берется любая гиря и добавляется на ту или другую чашку весов).

а) Докажите, что гири можно ставить в таком порядке, чтобы сначала перевесила левая чашка, затем правая, потом снова левая, снова правая и так далее.

Этой последовательности результатов взвешиваний сопоставим слово из букв L и R: $LRLRLR$... Здесь буква L означает, что перевесила левая чашка, а буква R означает, что перевесила правая чашка.

б)* Докажите, что для любого слова длины n из букв L и R можно в таком порядке ставить гири на чашки весов, чтобы это слово соответствовало последовательности результатов взвешиваний.

М462. Плоскость пересекает боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды в точках, отстоящих от вершины на расстояния a, b, c и d (рис. 1). Докажите, что

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

К. Шварцман

М463.* Даны натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Суммы $x_1+x_2+\ldots+x_m$ и $y_1+y_2+\ldots+y_n$ равны между собой и меньше mn. Докажите, что в равенстве $x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_n$ можно вычеркнуть часть слагаемых так, чтобы снова получилось верное равенство.

К. Сибиряков

М464.* На плоскости дано 1000 квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Пусть M — множество центров этих квадратов. Докажите, что можно отметить часть квадратов так, чтобы каждая точка множества M попала не менее, чем в один и не более, чем в четыре отмеченных квадрата.

А. Плоткин

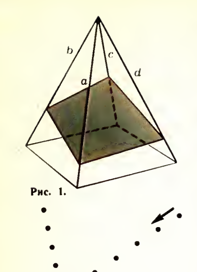


Рис. 1.

М465*. Имеется тысяча билетов с номерами 000, 001, . . ., 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, . . ., 99. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика можно получить из номера этого билета вычеркиванием одной из цифр. Докажите, что

а) можно разложить все билеты в 50 ящиков;

б) нельзя разложить все билеты менее, чем в 40 ящиков;

в) нельзя разложить все билеты менее, чем в 50 ящиков.

Пусть вообще имеется 10^k билетов с k-значными номерами от 00. . . 0 до 99. . . 9. Билет разрешается опускать в ящик, номер которого можно получить из номера этого билета вычеркиванием некоторых $k-2$ цифр.

г) Докажите, что при $k=4$ все 10 000 четырехзначных билетов, можно разложить по 34 ящикам.

д) Найдите минимальное количество ящиков, в которые можно разложить k-значные билеты. Попробуйте решить эту задачу для $k=4$, 5, 6, ...

С. Фомин

Рис. 2.

Ф473*. Рисунок 2 сделан со стробоскопической фотографии движения двух сталкивающихся шариков одинаковых диаметров, но разных масс. Стрелкой на рисунке показано направление движения одного из шариков до столкновения.

1) Определить отношение масс шаров.

2) Указать, в каком направлении двигался до столкновения второй шар. (9 кл.)

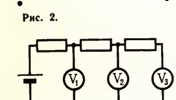


Рис. 3.

Ф474. Цепь, показанная на рисунке 3, собрана из одинаковых вольтметров. Первый вольтметр показывает $U_1=10$ В, а третий — $U_3=8$ В. Каково показание второго вольтметра? (9 кл.)

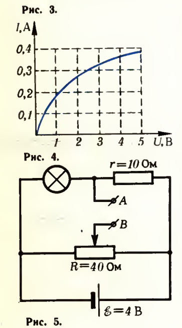


Рис. 4.

Рис. 5.

Ф475*. На рисунке 4 приведена вольтамперная характеристика лампочки от карманного фонаря. Лампочка включена в схему, показанную на рисунке 5.

1) Найти графически ток в лампочке.

2) При каком положении движка потенциометра напряжение между точками A и B равно нулю?

3) При каком положении движка потенциометра напряжение между точками A и B почти не будет меняться при небольших изменениях э. д. с. батареи?

Внутренним сопротивлением батареи пренебречь. (10 кл.)

Ф476. Природный уран состоит из смеси двух изотопов с относительными атомными массами 235 и 238 и отношением концентраций 7 : 1000. Для увеличения концентрации ^{235}U, который применяется в атомных реакторах, используется истечение газообразного соединения UF_6 (шестифтористый уран) в вакуум через маленькие отверстия. Газ пропускается через трубу T с пористыми стенками

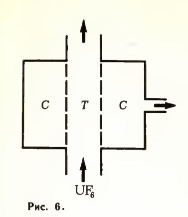


Рис. 6.

(рис. 6). Прошедший через стенки трубы газ откачивается из сосуда C. Оценить отношение концентраций $^{235}UF_6$ и $^{238}UF_6$ в откачиваемом газе. Относительная атомная масса фтора равна 19. (10кл.)

Ф477. Резиновое кольцо массы M лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Кольцо немного растягивают так, что оно сохраняет форму окружности и центр его остается неподвижным. После этого кольцо отпускают. Описать дальнейшее поведение кольца. Коэффициент упругости резинового жгута равен k.

А. Абрамян

Решения задач

М421—М425; Ф432—Ф437

М421. *При каких натуральных m и n ($m < n$) можно закрасить некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги в черный цвет так, чтобы любой прямоугольник размера $m \times n$ содержал ровно одну черную клетку?*

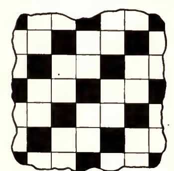


Рис. 1.

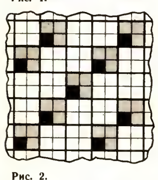


Рис. 2.

Докажем, что требуемая раскраска клетчатой плоскости для пары (m, n), $m < n$ существует в том и только в том случае, когда n делится на m.

Если раскраска плоскости такова, что в любом ряде (вертикальном и горизонтальном) закрашена черным каждая k-я по счету клетка (как на рисунке 1, где $k=3$), то в любом прямоугольнике $1 \times k$ будет ровно одна черная клетка. Из такой периодической раскраски для пары $(1, k)$ нетрудно получить периодическую раскраску для пары (m, km): нужно измельчить в m раз сетку и в каждой черной клетке старой (крупной) решетки оставить черной только одну, — скажем, левую нижнюю клетку (рисунок 2 получен из рисунка 1 именно таким приемом; здесь $k = 3$, $m = 2$). Итак, мы показали, как построить нужную раскраску для пары (m, n), если n делится на m.

Предположим теперь, что для пары (m, n), где n не делится на m ($n > m > 1$), построена нужная раскраска, и придем к противоречию.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $n \leqslant 2m - 1$. Если два вертикально расположенных прямоугольника $m \times n$ имеют общую угловую черную клетку, как показано на рисунке 3, то в их объединении больше не может быть черных клеток. Но в нем можно разместить горизонтальный (красный) прямоугольник $n \times m$, не содержащий черной клетки. Противоречие.

2) Пусть $n > 2m - 1$. Докажем сначала, что если K — черная клетка, то n-я клетка в том же ряду (считая от K) — тоже черная. Рассмотрим два вертикально расположенных прямоугольника $m \times n$ с общей нижней угловой клеткой K и еще два прямоугольника, полученные из них сдвигом на одну клетку вверх (голубой и желтый на рисунке 4). Поскольку в них должно быть по одной черной клетке, то черным цветом должны быть закрашены либо одна из желтых клеток и одна из голубых, либо одна зеленая клетка. Но первая возможность исключена, так как в горизонтальном красном прямоугольнике не может быть двух черных клеток; значит, зеленую клетку нужно закрасить в черный цвет.

Рассмотрим теперь квадрат $n \times n$ с черной клеткой в нижнем левом углу. Если $n = mk + r$, где $0 < r < m$, то квадрат можно разрезать на k горизонтальных прямоугольников $n \times m$ и «остаток» — прямоугольник $n \times r$ (рис. 5).

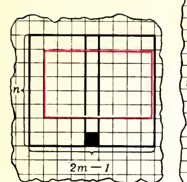


Рис. 3.

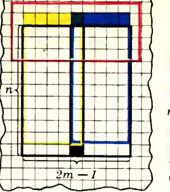


Рис. 4.

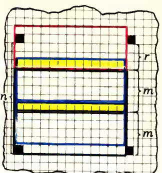


Рис. 5.

Рассматривая эти k прямоугольников, а также прямоугольники, полученные из них сдвигом на одну клетку вверх, мы последовательно убедимся, что в нижней (желтой) полоске каждого прямоугольника должна быть черная клетка. Но тогда в красном прямоугольнике будет две черные клетки. Противоречие.

Н. Васильев,
С. Охитин

◆

М422. *Разбейте произвольный треугольник на семь равнобедренных треугольников, из которых три конгруэнтны между собой.*

Пусть AB — бо́льшая сторона треугольника ABC. Проведем из вершины A, как из центра, дугу радиусом $|AC|$ и отметим точку D ее пересечения со стороной AB (рис. 6). Затем из вершины B проведем дугу радиусом $|BD|$; пусть E — точка ее пересечения со стороной BC. Из вершины C радиусом $|CE|$ проведем дугу до пересечения со стороной AC в точке F. И, наконец, снова из вершины A проведем дугу радиусом $|AF|$ и отметим точку G ее пересечения со стороной AB.

Нетрудно доказать, что точки C, D, E, F и G лежат на одной окружности, центр которой совпадает с центром O окружности, вписанной в треугольник ABC. Соединив эти пять точек с точкой O, а также точки F с G и D с E, получим требуемое разбиение (см. рисунок 6; $|CE| = |CF| = |DG|$).

А. Хабелашвили

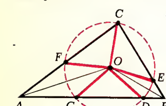


Рис. 6.

◆

М423. *Докажите, что для любых действительных x, y и z выполнено неравенство*
$$(x^2+y^2-z^2)\times(x^2+z^2-y^2)\times(y^2+z^2-x^2)\leqslant(x+y-z)^2\times(x+z-y)^2\times(y+z-x)^2.$$

Если одна из скобок в левой части отрицательна, то неравенство очевидно. Легко понять, что одновременно две скобки левой части отрицательными быть не могут. Поэтому можно считать, что все скобки в левой части больше нуля.

Так как $x^2+z^2-y^2>0$, то $2(x-z)^2(x^2+z^2-y^2)\geqslant 0$,
или
$$(x-z)^2(2x^2+2z^2-2y^2+2xz-2xz)\geqslant 0.$$
Значит, $(x-z)^2((x+z)^2+(x-z)^2-2y^2)\geqslant 0$,
то есть $(x-z)^2(x+z)^2+(x-z)^4-2y^2(x-z)^2\geqslant 0$.
Перепишем последнее неравенство так:
$$y^4-(x^2-z^2)^2\leqslant(y^2-(x-z)^2)^2,$$
или
$$(y^2+z^2-x^2)(x^2+y^2-z^2)\leqslant(y+z-x)^2(x+y-z)^2. \quad (1)$$
Аналогично из неравенства $x^2+y^2-z^2>0$ следует, что
$$(x^2+z^2-y^2)(y^2+z^2-x^2)\leqslant(x+z-y)^2(y+z-x)^2, \quad (2)$$

а из неравенства $y^2 + z^2 - x^2 > 0$, — что

$$(x^2 + z^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2) \leqslant$$
$$\leqslant (x + z - y)^2(x + y - z)^2. \qquad (3)$$

Перемножая неравенства (1) — (3) и извлекая затем квадратный корень из обеих частей, получаем требуемое неравенство. *Г. Гуревич*

◆

М424. *Через каждую вершину тетраэдра проведена плоскость, содержащая центр окружности, описанной около противоположной грани, и перпендикулярная к противоположной грани. Докажите, что эти четыре плоскости пересекаются в одной точке.*

Пусть S — одна из вершин тетраэдра, SH — его высота, O_1 — центр окружности, описанной вокруг грани, противоположной вершине S. Плоскость, проходящая через вершину S, содержит высоту SH и отрезок SO_1 (рис. 7). Проведем через точку O_1 прямую, параллельную SH; очевидно, что она принадлежит нашей плоскости. С другой стороны, ясно, что эта прямая проходит через центр сферы, описанной вокруг тетраэдра, так что центр сферы принадлежит проведенной плоскости. Поэтому все четыре плоскости, содержа центр описанной вокруг тетраэдра сферы, пересекаются в одной точке.

А. Ягубьянц

Рис. 7.

◆

М425. *Существует ли такое натуральное N, что каждое рациональное число между нулем и единицей представляется в виде суммы N чисел, обратных натуральным?*

Обозначим через A_n множество чисел, представимых в виде суммы не более, чем n слагаемых, обратных натуральным. Тогда $A_{n+1} = \{\alpha + 1/q\}$, $\alpha \in A_n$, $q \in \mathbf{N}$ (натуральное); ясно, что $A_{n+1} \supset A_n$.

Мы сейчас докажем, что A_n (ни при каком n) не содержит все рациональные числа промежутка $]0; 1[$. Для этого докажем индукцией по n более сильное утверждение:

I. *В любом отрезке* $[a; b] \subset]0; 1[$ *найдется целый отрезок* $[c; d]$, *не пересекающийся с* A_n*).

Для $n = 1$ это очевидно. Докажем это утверждение для некоторого n, считая, что для $n - 1$ оно доказано.

Пусть задан отрезок $[a; b] \subset]0; 1[$. Выберем отрезок $[c_0; d_1] \subset [a; b]$, не пересекающийся с A_{n-1}, и возьмем число $m \in \mathbf{N}$, такое что $d_1 - c_0 > 2/m$ (т. е. $2/(d_1 - c_0) < m$). Тогда ни одно из чисел вида $\alpha + 1/q$, где $\alpha \in A_{n-1}$, $q \geqslant m$, не лежит в правой половине $[c_1; d_1]$ отрезка $[c_0; d_1]$: если $\alpha \leqslant c_0$, то $\alpha + 1/q < (c_0 + d_1)/2 = c_1$. Мы можем, далее, последовательно выбирать $[c_1; d_1] \supset [c_2; d_2] \supset [c_3; d_3] \supset \ldots \supset [c_m; d_m]$ так, что $[c_k - 1/k; d_k - 1/k]$ не пересекается с A_{n-1} $(k = 1, 2, \ldots, m)$. В промежутке $[c_2; d_2]$, тем самым, не будут содержаться числа вида $\alpha + \frac{1}{2}$ и $\alpha + \frac{1}{q}$, где $\alpha \in A_{n-1}$, $q \in \mathbf{N}$ и $q \geqslant m$; в промежутке $[c_3; d_3]$ не содержатся числа вида $\alpha + \frac{1}{2}$, $\alpha + \frac{1}{3}$ и $\alpha + \frac{1}{q}$ для $q \geqslant m$, $\alpha \in A_{n-1}$, и т. д.; так что в промежутке $[c_m; d_m]$ не будет уже содержаться никакое число вида $\alpha + 1/q$, $\alpha \in A_{n-1}$, $q \in \mathbf{N}$. То есть отрезок $[c_m; d_m]$ не пересекается с A_n, что и требовалось доказать.

Таким образом, ответ на вопрос, поставленный в задаче М425, отрицательный: такого натурального числа N нет.

В решениях, присланных читателями, был замечен целый ряд свойств множества A_n; некоторые из них сильнее, чем доказанное выше свойство I.

*) Как говорят, множество A_n *нигде не плотно*.

Другие свойства A_n, которые также отличают его от множества всех рациональных чисел:

II A_n *не содержит никакой бесконечной возрастающей последовательности.*

Это свойство эквивалентно таким двум.

III. *Для каждой точки* $x \in A_n$ *существует ближайшая к ней слева.*

IV. *В каждом подмножестве* A_n *есть наибольшее число.*

V. *Пределом последовательностей различных чисел, содержащихся в* A_n, *может быть только число, содержащееся в* A_{n-1} *или* 0 (а не любое действительное число на отрезке, как было бы, если бы A_n содержало все рациональные числа этого отрезка!)

Доказательство этого последнего свойства особенно изящно.

Пусть $x_m = \frac{1}{q_1^{(m)}} + \ldots + \frac{1}{q_n^{(m)}}$, $q_1^{(m)} \leqslant q_2^{(m)} \leqslant \ldots \leqslant q_n^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$ — некоторая последовательность чисел из A_n, стремящаяся к пределу a. Мы можем выбрать из последовательности $q_1^{(m)}$ (натуральных чисел!) либо возрастающую подпоследовательность, либо «стационарную», в которой повторяется одно и то же число; потом (выбросив все остальные x_m) ту же операцию проделать для $q_2^{(m)}$ и т. д. Поскольку все x_m различны, некоторая подпоследовательность $q_i^{(m)}$ обязана возрастать и стремиться к бесконечности. Таким образом, мы получим, перейдя к подпоследовательности, такие x_m, что для некоторого $r < n$

$q_i^{(1)} = q_i^{(2)} = q_i^{(3)} = \ldots = q_i$ при $i \leqslant r$ и $q_i^{(m)} \to \infty$ для $i > r$ при $m \to \infty$.

Тогда число $a = \lim\limits_{m \to \infty} x_m = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_r}$ принадлежит $A_r \subset A_{n-1}$ (заметим, что число a может оказаться нулем, если уже из последовательности $q_1^{(m)}$ мы сможем выбрать возрастающую). С другой стороны, очевидно, что каждая точка A_{n-1} действительно будет *предельной точкой* A_n.

Теперь читатель без труда докажет и свойства II, III, IV множеств A_n. Разумеется, из V легко вывести и утверждение задачи (по индукции), и свойство I.

Н. Васильев

◆

Ф432. *В стеклянном шаре имеется воздушный сферический пузырек. Необходимо найти способы измерения диаметра этого пузырька. Шар должен остаться целым. Способы должны быть описаны как можно точнее.*

Прежде всего выясним, на каком диаметре шара находится центр воздушного пузырька. Для этого положим шар на горизонтальную поверхность и подождем, пока прекратятся его качания. В положении устойчивого равновесия шара центр пузырька лежит на вертикальном диаметре, выше центра шара (рис. 8).

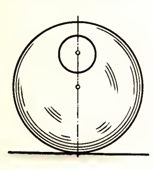


Рис. 8.

Затем найдем положение центра тяжести шара с пузырьком. Поместим шар на наклонную плоскость и будем медленно увеличивать угол наклона плоскости к горизонту. При этом шар будет поворачиваться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его геометрический центр, так, чтобы в любой момент центр тяжести шара находился на вертикали, проходящей через точку касания шара с плоскостью. Шар начнет скатываться (при достаточно большом коэффициенте трения скольжения между шаром и плоскостью), когда центр тяжести займет самое правое из всех возможных его положений (рис. 9). Это позволяет определить положение центра тяжести шара с воздушным пузырьком: он отстоит от геометрического центра шара на расстояние

$$l = R \sin \alpha,$$

где R — радиус шара, α — угол наклона плоскости к горизонту, при котором шар начнет скатываться.

Теперь займемся непосредственно определением размеров пузырька и его положения внутри стеклянного шара. Предположим, что мы заполнили полость стеклом, из кото-

рого изготовлен шар. Центр тяжести переместителя в геометрический центр шара. Это означает, что

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho a = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)\rho l.$$

Здесь r — радиус воздушного пузырька (полости), ρ — плотность стекла, a — расстояние от центра пузырька до центра шара (рис. 10). Взвесив шар в воздухе и в воде (с известной плотностью ρ_0), можно записать еще два уравнения:

$$\frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)\rho |\vec{g}| = P_1,$$

$$\frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)\rho |\vec{g}| - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 |\vec{g}| = P_2.$$

Решив систему трех уравнений с тремя неизвестными, найдем радиус пузырька r и его положение a.

Возможен другой способ измерения r — оптический. Достаточно поместить шар в жидкость с показателем преломления, равным показателю преломления стекла, чтобы шар в этой жидкости стал невидимым. Рассматривая ход лучей, например, от точечного источника, можно найти r (проверьте это самостоятельно).

Можно, конечно, предложить и много других способов. Поэтому мы обязательно еще раз вернемся к этой задаче, когда ознакомимся со всеми письмами наших читателей.

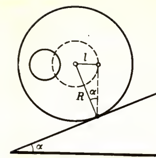


Рис. 9.

Рис. 10.

Ф433. *Две одинаковые плосковыпуклые линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см каждая расположены на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. Оптические оси линз совпадают, линзы обращены друг к другу плоскими сторонами. Где будет находиться изображение источника, находящегося на расстоянии $d = 40$ см от левой линзы, если пространство между линзами заполнить стеклом с показателем преломления таким же, как у линз?*

◆

Обозначим через f расстояние от левой линзы до изображения источника, которое образуется при преломлении на выпуклой сферической поверхности левой линзы. Это расстояние связано с расстоянием d от источника до левой линзы соотношением

$$\frac{1}{d} + \frac{n}{f} = (n-1)\frac{1}{R},$$

где n — показатель преломления стекла, R — радиус сферической поверхности линзы.

Аналогичное равенство можно записать для преломления на выпуклой поверхности правой линзы:

$$\frac{n}{d'} + \frac{1}{f'} = (n-1)\frac{1}{R}.$$

Здесь $d' = l - f$ — расстояние от первого изображения, которое является «источником» для второго преломления, до правой линзы, а f' — искомое расстояние от правой линзы до изображения, даваемого системой. Кроме того, для каждой линзы в отдельности выполняется соотношение

$$(n-1)\frac{1}{R} = \frac{1}{F}.$$

Решая все три уравнения совместно, найдем f':

$$f' = \frac{F\,[l\,(d-F) - ndF]}{(d-F)(l-nF) - ndF}.$$

Полагая $n = 1{,}5$, получим $f' = 10$ см.

◆

Ф434. *Какое количество теплоты выделится на сопротивлении R при установлении равновесия после замыкания ключа K (рис. 11), если конденсатор был предварительно заряжен до разности потен-*

За малый промежуток времени Δt на сопротивлении R выделится количество теплоты

$$\Delta Q = U_R I \Delta t = U_R \Delta q,$$

где U_R — напряжение на сопротивлении и Δq — заряд, прошедший через сопротивление за время Δt. Очевидно, что Δq равен изменению заряда конденсатора. Так как заряд конденсатора q связан с напряжением на конденсаторе U_C

циалов 2U? Э. д. с. источника U, емкость конденсатора C. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

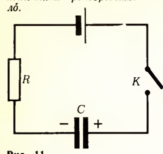


Рис. 11.

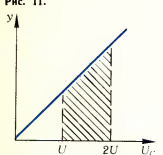


Рис. 12.

соотношением $q = CU_C$, то изменение заряда конденсатора пропорционально изменению напряжения:

$$\Delta q = C\Delta U_C.$$

Напряжение U_R на сопротивлении R равно

$$U_R = U_C - U.$$

Таким образом,

$$\Delta Q = (U_C - U)C\Delta U_C = CU_C\,\Delta U_C - CU\Delta U_C.$$

Полное количество теплоты, выделившееся на сопротивлении R при установлении теплового равновесия, равно сумме ΔQ:

$$Q = \Sigma\Delta Q = C\Sigma U_C \Delta U_C - CU\Sigma\Delta U_C.$$

Вычислим эту сумму.

Напряжение на конденсаторе уменьшается от $2U$ до U. Поэтому

$$\Sigma\Delta U_C = U.$$

Сумма $\Sigma U_C\,\Delta U_C$ численно равна площади фигуры (трапеции) под графиком функции $y = U_C$ (рис. 12):

$$\frac{2U+U}{2}U = \frac{3}{2}U^2.$$

Тогда окончательно

$$Q = \frac{3}{2}CU^2 - CU^2 = \frac{1}{2}CU^2.$$

Задачу можно решить, пользуясь законом сохранения энергии: количество теплоты, выделившееся на сопротивлении R, равно разности работы источника и изменения энергии конденсатора.

Ф435. *В установке, показанной на рисунке 13, муфта M прикреплена к двум одинаковым пружинам, коэффициенты жесткости которых $k = 10$ Н/м. Муфта без трения может скользить по горизонтальному стержню AB. Установка вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4{,}4$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Найти период малых колебаний муфты. Масса муфты $m = 0{,}2$ кг.*

При каком значении ω колебаний муфты не будет?

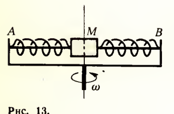


Рис. 13.



При вращении установки муфта совершает колебания около положения равновесия, если при отклонении от этого положения равнодействующая всех сил, действующих на муфту, сообщает ей ускорение $\vec{a}$ относительно стержня, направленное к оси вращения. Это возможно, если в неподвижной системе координат ускорение муфты $\vec{a}_0$ направлено к оси вращения стержня и превышает центростремительное ускорение $\vec{a}_ц$ той точки стержня, в которой в данный момент находится муфта: $|\vec{a}| = |\vec{a}_0| - |\vec{a}_ц|$.

Пусть муфта находится на расстоянии x от оси вращения стержня, тогда центростремительное ускорение точки стержня, в которой находится муфта, равно $\omega^2 x$, и

$$|\vec{a}| = |\vec{a}_0| - \omega^2 x.$$

На муфту со стороны пружин действуют силы упругости, равнодействующая которых направлена к оси вращения стержня и равна в проекции на ось X $-kx - kx = -2kx$. Согласно второму закону Ньютона

$$ma_0 = -2kx,$$

или

$$m(a + \omega^2 x) = -2kx.$$

Запишем это уравнение следующим образом:

$$a = -\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)x.$$

Мы получили, что ускорение муфты прямо пропорционально ее координате, взятой с противоположным знаком. Это означает, что муфта совершает гармонические колебания. Период этих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{m} - \omega^2}} \approx 0{,}7\ \text{с}.$$

Колебаний муфты не будет, если при смещении муфты из положения равновесия ее ускорение $\vec{a}$ относительно стержня окажется направленным от оси вращения, то есть

$$\frac{2k}{m} - \omega^2 < 0, \text{ или } \omega > \sqrt{\frac{2k}{m}} = 10 \text{ рад/с}.$$

◆

Ф436. *Плотность ρ газа, состоящего из смеси гелия и аргона, при давлении $p = 152$ кН/м² и температуре $T = 300$ К равна 2,0 кг/м³. Сколько атомов гелия содержится в 1 см³ газовой смеси?*

Для того чтобы найти число молекул (атомов) гелия N_1 в объеме $V = 10^{-6}$ м³, надо определить отношение массы гелия m_1 к его молярной массе $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$N_1 = \frac{m_1}{\mu_1} N_A. \quad (1)$$

Запишем уравнения газового состояния для гелия и аргона:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT, \; p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT$$

(p_1 — давление гелия, p_2 — давление аргона, m_2 — масса аргона, $\mu_2 = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — его молярная масса). Согласно закону Дальтона давление смеси газов $p = p_1 + p_2$, то есть

$$p = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) \frac{RT}{V}. \quad (2)$$

Плотность ρ смеси равна сумме плотностей гелия и аргона:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \frac{m_1}{V} + \frac{m_2}{V}. \quad (3)$$

Из равенств (2) и (3) найдем отношение $\frac{m_1}{\mu_1}$, подставим его в выражение (1) и получим

$$N_1 = N_A V \frac{p\mu_2 - \rho RT}{RT(\mu_2 - \mu_1)} \approx 4 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3} = 4 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}.$$

◆

Ф437. *Проволочная рамка, имеющая форму треугольника с углом $\alpha = 30°$, помещена в вертикальной плоскости так, как показано на рисунке 14. По проволоке могут без трения скользить связанные друг с другом нитью два грузика с массами $m_1 = 0,1$ кг и $m_2 = 0,3$ кг. Чему равно натяжение нити и угол β в положении равновесия грузиков?*

Является ли это равновесие устойчивым?

На рисунке 14 показаны все силы, действующие на грузики. Силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ натяжения нити равны по абсолютной величине и противоположно направлены: $\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$ и $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$. Силы реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ перпендикулярны к сторонам рамки и, следовательно, образуют друг с другом угол 90°. Силы тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$, как всегда, направлены вертикально вниз.

Так как система из связанных нитью грузов находится в равновесии, то

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m_1\vec{g} + m_2\vec{g} = 0,$$

или

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + m_1\vec{g} + m_2\vec{g} = 0.$$

Это означает, что векторы $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ и $m_1\vec{g} + m_2\vec{g}$ образуют треугольник (рис. 15), причем этот треугольник прямоугольный: $\widehat{BAC} = 90°$. В равновесии находится и каждый из грузиков. Следовательно,

$$m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 = 0, \quad \vec{N}_2 + m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = 0.$$

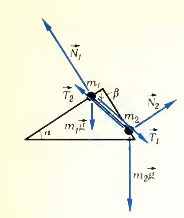


Рис. 14.

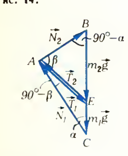


Рис. 15.

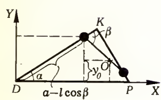


Рис. 16.

Из этих равенств следует, что вектор $\vec{T}_1$ соединяет вершину A треугольника ABC с точкой E, а вектор $\vec{T}_2$ — точку E с точкой A.

В треугольнике AEC $\widehat{ACE}=\alpha$ и $\widehat{CAE}=90°-\beta$, а в треугольнике ABE $\widehat{ABE}=90°-\alpha$ и $\widehat{BAE}=\beta$. Согласно теореме синусов

$$\frac{T}{\sin\alpha}=\frac{m_1|\vec{g}|}{\sin(90°-\beta)}=\frac{m_1|\vec{g}|}{\cos\beta},\quad \frac{m_2|\vec{g}|}{\sin\beta}=\frac{T}{\sin(90°-\alpha)}=$$
$$=\frac{T}{\cos\alpha}.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{m_2}{m_1}\operatorname{ctg}\alpha=3\sqrt{3},\quad \beta\approx79°;$$

$$T=m_1|\vec{g}|\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\approx2{,}7\ \text{Н}.$$

Теперь выясним, является ли найденное положение равновесия устойчивым. Положение равновесия устойчиво, если потенциальная энергия системы в этом положении минимальна, то есть центр тяжести системы грузов находится в наинизшем положении. Для того чтобы выяснить, выполняется ли это условие, найдем координату центра тяжести системы.

Обозначим длину стороны DK проволочного треугольника (рис. 16) через a, а длину нити — через l. Центр тяжести системы (точка O) делит длину нити в отношении $\frac{m_2}{m_1}$. Следовательно, он находится на расстоянии $b=\frac{m_2}{m_1+m_2}l$ от левого грузика. Из рисунка 16 видно, что

$$y_0=(a-l\cos\beta)\sin\alpha-b\sin(\beta-\alpha)=a\sin\alpha-l(\cos\beta\sin\alpha+$$
$$+\frac{m_2}{m_1+m_2}\sin(\beta-\alpha)).$$

Это выражение минимально, когда максимально выражение

$$y_1=\cos\beta\sin\alpha+\frac{m_2}{m_1+m_2}\sin(\beta-\alpha).\qquad(*)$$

Преобразуем выражение (*):

$$y_1=\cos\beta\sin\alpha+\frac{m_2}{m_1+m_2}(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)=$$
$$=\frac{m_2}{m_1+m_2}\sin\beta\cos\alpha+\frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\beta\sin\alpha=$$
$$=\sin(\beta+\varphi),\qquad(**)$$

где $\sin\varphi=\frac{m_1}{m_1+m_2}\sin\alpha$, $\cos\varphi=\frac{m_2}{m_1+m_2}\cos\alpha$

и $\operatorname{tg}\varphi=\frac{m_1}{m_2}\operatorname{tg}\alpha$.

Очевидно, что выражение (**) максимально при

$$\beta+\varphi=\frac{\pi}{2},\quad\text{или}\quad \operatorname{tg}\beta=\operatorname{ctg}\varphi=\frac{m_2}{m_1}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Следовательно, найденное положение равновесия устойчиво. Тот, кто умеет дифференцировать, мог бы найти это значение β из условия экстремума (максимума) выражения (*).

И. Слободецкий

Нефроида

Нефроиду можно определить как траекторию фиксированной точки подвижной окружности (O_1, r), катящейся снаружи без скольжения по неподвижному кругу $(O, 2r)$ (рис. 1). Когда, например, окружность (O_1, r) повернется из начального положения на угол 2φ, то описывающая нефроиду точка попадет из M_0 в положение M. Нефроида обладает центром симметрии O и двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии.

Укажем некоторые свойства нефроиды и используем их для другого ее построения. Пусть RN — диаметр окружности (O_1, r) и $T=(MR)\cap(O, 2r)$. Пусть, далее, $U=(OT)\cap(MN)$. Можно доказать, что UN — касательная к нефроиде в точке M (см., например, построение касательной к дельтоиде в «Кванте», 1977, № 3). Треугольники O_1MR и ROT — равнобедренные. Значит, $\widehat{O_1MR}=\widehat{O_1RM}=\widehat{ORT}=\widehat{OTR}$. Поэтому $UT \| MO_1$. Треугольники MO_1N и UON подобны. Следовательно, треугольник UON равнобедренный и $|UO|=4r$. UMT — прямоугольный треугольник. Опишем около «синюю» окружность $(O_2, 3r)$. Тогда $\breve{MT}=2\varphi\cdot 3r=3\varphi\cdot 2r=\breve{M_0T}$. На этом основан второй способ построения нефроиды: катим по неподвижному кругу $(O, 2r)$ окружность $(O_2, 3r)$, касающуюся его так, как показано на рисунке 1. Нефроиду описывает точка $M\in(O_2, 3r)$.

Для дальнейшего введем понятие «огибающая семейства кривых $\{L\}$». *Огибающая* — непрерывная кривая l такая, что: а) каждая ее точка принадлежит одной из кривых семейства $\{L\}$ и, обратно, каждая из кривых в $\{L\}$ имеет с l общую точку; б) в каждой такой точке касательная у l и у соответствующей кривой из $\{L\}$ — общая. В частности, если $\{L\}$ — семейство прямых, то каждая из них должна касаться огибающей в некоторой ее точке. На чертеж часто огибающая не наносится, но, тем не менее, в и д н а, если кривых семейства $\{L\}$ нарисовано «много». Именно так предстает нефроида на второй странице обложки — как огибающая семейства окружностей. Чтобы убедиться, что эта огибающая действительно нефроида, можно провести из точки R отрезок прямой $RV\perp OM_0$. Ясно, что $|RV|=2r\sin\varphi=|RM|$ и что $RM\perp UN$. Значит, UN — касательная к окружности $(R, |RM|)$ и, одновременно, к нефроиде.

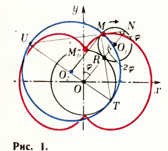


Рис. 1.

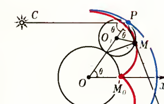


Рис. 2.

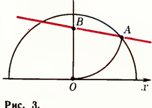


Рис. 3.

Чирнгауз, о котором говорилось в подписи к второй странице обложки, изучал главным образом «оптические» кривые, среди которых видное место занимали *катакаустики*. Катакаустика данной кривой — это огибающая отраженных от нее лучей света. Пусть CP — один из таких параллельных лучей, идущих, например, от Солнца. Если CP попадает на вогнутую «синюю» цилиндрическую поверхность (рис. 2), то он отражается от нее под углом θ, равным углу падения. Рассмотрим окружности

$$\left(O, \frac{|OP|}{2}\right) \text{ и } \left(O_1, \frac{|OP|}{4}\right)$$

(рис. 2).

Тогда $\widehat{CPO}=\widehat{POX}=\widehat{OPQ}=\theta$

Ясно, что $\widehat{OO_1M}=2\theta$ и точка M может быть получена прокатыванием окружности $\left(O_1, \frac{|OP|}{4}\right)$ вокруг $\left(O, \frac{|OP|}{2}\right)$ на угол 2θ из положения M_0. Следовательно, луч света PQ действительно касается нефроиды в точке M.

Половинку нефроиды при ярком солнце можно увидеть утром над чашкой кофе.

Нефроида может быть также получена как огибающая следующего семейства прямых. Рассмотрим (рис. 3) окружность с центром в O и два ее взаимно перпендикулярных диаметра Ox и Oy. Выберем произвольно на диаметре Oy точку B и сделаем с помощью окружности $(B, |BO|)$ засечку A на исходной окружности. Проведем для всевозможных точек B через точки B и A прямые BA. Огибающая семейства этих прямых — нефроида. Докажите это.

В. Березин

А. Земляков, Б. Ивлев

Задачи на повторение

В начале учебного года мы предлагаем ученикам IX—X классов не совсем обычное задание. К каждому из перечисленных ниже вопросов дано пять вариантов ответа (а, б, в, г, д), из которых в точности один — правильный. Найдите и подчеркните его. Зафиксируйте время, которое вам потребовалось; сравните ваши ответы с приведенными в конце номера.

Эти задания предлагались на республиканских олимпиадах по математике в 1977 году, причем на их выполнение давалось от 30 до 45 минут. В среднем из 10 ответов верными оказывались только шесть. А как будет у вас?

IX класс

1. Сколько стрелок можно оставить на рисунке 1 так, чтобы они задавали функцию с областью определения $X \subset \{x_1, x_2, x_3\}$? (Укажите все возможности.)

Ответ. а) Только 3; б) все 6; в) от 0 до 3; г) от 0 до 6; д) от 3 до 6.

2. При каких значениях m дробь

$$\frac{m^3 - m}{2\sqrt{m}}$$

равна 0?

Ответ. а) $m \in \{0; -1; 1\}$; б) $m \in \{0; 1\}$; в) $m = 0$; г) $m \in \{-1; 1\}$; д) $m = 1$.

3. Какой график имеет уравнение

$$x^2 - y^2 = 0?$$

Ответ. а) Пустое множество; б) точку; в) прямую; г) объединение двух прямых; д) окружность.

4. При каких значениях a и b справедливо соотношение

$$\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}?$$

Ответ. а) $a = b = 0$; б) $a \in]-\infty; 0]$, $b \in]-\infty; 0]$; в) a и b одного знака; г) при любых a и b; д) ни при каких a и b.

5. Число A задано с точностью до 0,01, число B — с точностью до 0,02. С какой точностью можно указать число $2A - B$?

Ответ. а) 0,01; б) 0,02; в) 0,04; г) 0,00; д) ответ зависит от значений A и B.

6. В треугольнике длины сторон равны 3,5, n, где n — натуральное число. Укажите возможные значения n.

Ответ. а) $n \geqslant 1$; б) $n \geqslant 3$; в) $n \leqslant 8$; г) $3 \leqslant n \leqslant 7$; д) $3 \leqslant n \leqslant 5$.

7. Укажите значение $\cos(90° + \alpha)$.

Ответ. а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $-\sin\alpha$; г) $-\cos\alpha$; д) это значение не определено.

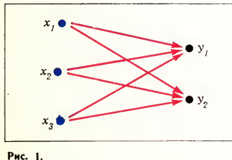


Рис. 1.

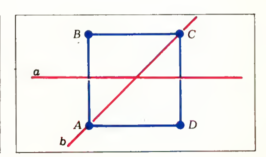


Рис. 2.

8. $ABCD$ — квадрат. Найдите образ вершины A при композиции $S_b \circ S_a$ симметрий относительно указанных на рисунке 2 осей a и b.

Ответ. а) A; б) B; в) C; г) D; д) точка, не являющаяся вершиной квадрата.

9. В треугольнике ABC отрезок AM — медиана. Укажите вектор $\vec{x} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.

Ответ. а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{BA}$; д) $\overrightarrow{CA}$.

10. Высота правильного треугольника ABC равна 1. На каком расстоянии от вершины A следует провести прямую, параллельную прямой BC, чтобы она делила треугольник ABC на две части одинаковой площади?

Ответ. а) $^1/_2$; б) $^2/_3$; в) $^3/_4$; г) $\sqrt{2}/2$; д) $\sqrt{3}/2$.

X класс

1. Сколькими различными способами 12 человек можно распределить на работу в две смены по 6 человек?

Ответ. а) C_{12}^6; б) A_{12}^6; в) $\frac{1}{2} C_{12}^6$; г) $C_{12}^6 \cdot C_{12}^6$; д) P_6.

2. Даны два действительных числа $x = 0{,}1093\ldots$ и $y = 0{,}3006\ldots$ Сколько цифр после запятой можно указать у их суммы $x + y$?

Ответ. а) четыре; б) три; в) две; г) одну; д) ни одной.

3. Какими из свойств монотонности и ограниченности обладает последовательность $a_n = -\frac{1}{n^2}$?

Ответ. а) возрастает и не ограничена; б) убывает и не ограничена; в) возрастает и ограничена; г) убывает и ограничена; д) не ограничена и не монотонна.

4. Функция f дифференцируема в точке x_0. Чему равен предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)).$$

Ответ. а) 0; б) $f(x_0)$; в) $-f(x_0)$; г) $f'(x_0)$; д) этот предел не существует.

5. Найдите производную функции $(x^{10} + 1)^{10}$.

Ответ. а) $10(x^{10} + 1)^9$; б) $100(x^{10} + 1)^9$; в) $10x^9(x^{10} + 1)^9$; г) $100x^9(x^{10} + 1)^9$; д) $x^9(x^{10} + 1)^9$.

6. Плоскость пересекает ребра AB, BC и CD тетраэдра $ABCD$ (не в вершинах). Какое еще ребро будет пересекать эта плоскость?

Ответ. а) $[AC]$; б) $[AD]$; в) $[BD]$; г) никакое; д) еще два ребра.

7. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — векторы в пространстве, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$, $(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 90^\circ$. Каково возможное значение $\varphi = \widehat{\vec{a}, \vec{c}}$?

Ответ. а) $\varphi = 0^\circ$; б) $\varphi = 90^\circ$; в) $\varphi = 180^\circ$; г) $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ$; д) $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ$.

Советуем десятиклассникам решить и задачи для IX класса.

Продолжаем соревнования художников

Напомииаем, что точки в декартовой системе коордииат иужио ставить по очереди и соедиият каждую точку отрезком с предыдущей точкой.

Что у вас получится, вы увидите сами!

1. (4; 7), (5; 8), (6; 8), (8; 9), (9; 9), (7; 8), (9; 8), (6; 7), (7; 6), (9; 6), (11; 5), (12; 3), (12; 2), (13; 3), (12; 1), (7; 1), (8; 2), (9; 2), (8; 3), (6; 1), (5; 1), (6; 2), (6; 3), (5; 6), (4; 6), (4; 7) и (5; 7).

2. (—12; 15), (—10; 17), (—1; 8), (1; 8), (3; 10), (2; 11), (9; 18), (11; 16), (1; 6), (5; 2), (6; 3), (13; —4), (11; —6), (1; 4), (4; —11), (5; —11), (5; —18), (—5; —18), (—5; —11), (—4; —11), (—1; 4), (—3; 2), (—2; 1), (—9; —6), (—11; —4), (—1; 6) (—4; 9), (—5; 8), (—12; 15) и (—4; —18), (—4; —14), (—1; —14), (—1; —18) и (0; —16), (0; —14), (4; —14), (4; —16), (0; —16).

3. (10; 7), (11; 6), (12; 7), (12; 6), (13; 5), (14; 3), (13; 3), (12; 4), (10; 0), (9; —1), (10; —2), (8; —4), (9; —2), (7; —4), (8; —2), (6; —1), (5; —1), (2; —4), (8; —10), (6; —10), (6; —9), (1; —4), (2; —2), (1;—1)(—1; 0), (—12; —3), (—6; —1), (0; 3), (4; 4), (6; 4), (8; 3), (9; 3), (11; 5), (10; 7) и (12,5; 5).

4. (—3; —4), (—4; —3), (—5; —3), (—7; —4), (—10; —7), (—11; —11), (—13; —14), (—11; —14), (—10; —12), (—9; —11), (—5; —9), (—6; —9), (—5; —8), (—4; —6), (—5; —5), (—4; —4), (—3; —4) и (—4; —3,5).

А. Синельников

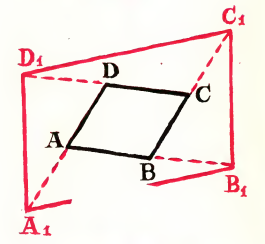
«Квант» для младших школьников

Задачи



1. Один гражданин захотел выпить стакан сока. Он подошел к киоску и выложил перед продавщицей все деньги, которые у него были — бумажные купюры и мелочь. Продавщица пересчитала деньги, положила их в общую выручку, затем налила стакан сока стоимостью 9 копеек и отсчитала сдачу. Но при этом она ошиблась: дала столько копеек, сколько полагалось дать рублей, а рублей дала столько, сколько полагалось дать копеек.

Гражданин, не считая, положил деньги в карман и ушел, а придя домой, обнаружил, что денег у него стало в четыре раза больше, чем было. Сколько денег было у гражданина?



2. Килограмм пломбира на 40 копеек дороже килограмма шоколадного мороженого. Андрей и Виктор заказали по 150 г мороженого, причем у Андрея пломбира вдвое больше, чем шоколадного, а у Виктора того и другого поровну. Чья порция дороже и на сколько?

3. Ромб $ABCD$ «раздули» в четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок: $A_1 \in [DA)$, $|A_1A| = |AD|$ и т. д.). Площадь ромба $ABCD$ равна S. Доказать, что $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм и найти его площадь.



4. Почему ножницы, которыми пользуются портные, делают с короткими ручками и с длинными лезвиями, а ножницы, которыми режут металлические листы, например, жесть, делают с длинными ручками и с короткими лезвиями?

А. Перышкин

Оригинальное доказательство закона Архимеда

(Из истории физики)

Вопросами гидростатики, основы которой были заложены Архимедом, занимались многие ученые. Среди них — голландский ученый Симон Стевин (1548—1620). В своей книге «Начала гидростатики» Стевин дал простое, но очень оригинальное доказательство закона Архимеда. Изложению этого доказательства предшествуют семь постулатов — утверждений, не требующих доказательств. Вот один из этих постулатов:

«*Собственным весом тела является вес его в воздухе*; *в воде вес тела является иным*» *).

Далее Стевин доказывает такое «Предложение»: «*Вода удерживает в воде любое положение*».

Дана невесомая форма *A*, содержащая воду и помещенная в воду *BC* (рис. 1). Требуется доказать, что вода *A* не будет перемещаться.

Доказательство. Если бы было иначе и вода *A* не осталась бы на месте, а опустилась в *D*, то вода, которая заняла бы ее место, также опустилась бы по той же причине; таким образом, вследствие перемещения *A* вода пришла бы в вечное движение, что является абсурдом.

Подобным же образом доказывается, что *A* не поднимется и не переместится в какую-либо сторону; поэтому она будет пребывать там, где она помещена — в *D*, *E*, *F*, *G* или любом другом месте в воде *BC*.

Опираясь на доказанное предложение, Стевин затем доказывает следующую теорему:

Всякое твердое тело весит в воде менее чем в воздухе на величину веса равного ему объема воды.

Дано твердое тело *A* и вода *BC* (рис. 2). Требуется доказать, что если *A* будет помещено в воду *BC*, то вес его будет меньше чем в воздухе на величину веса воды, занимающей объем, равный объему *A*.

Доказательство. Пусть *D* — невесомая форма, подобная и равная по объему телу *A*. Наполним ее водой и поместим в воду *BC*. Согласно доказанному выше «Предложению», форма *D* будет сохранять в воде *BC* любое положение. Выльем из формы *D* воду и поместим в нее тело *A*.

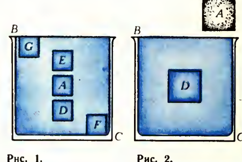


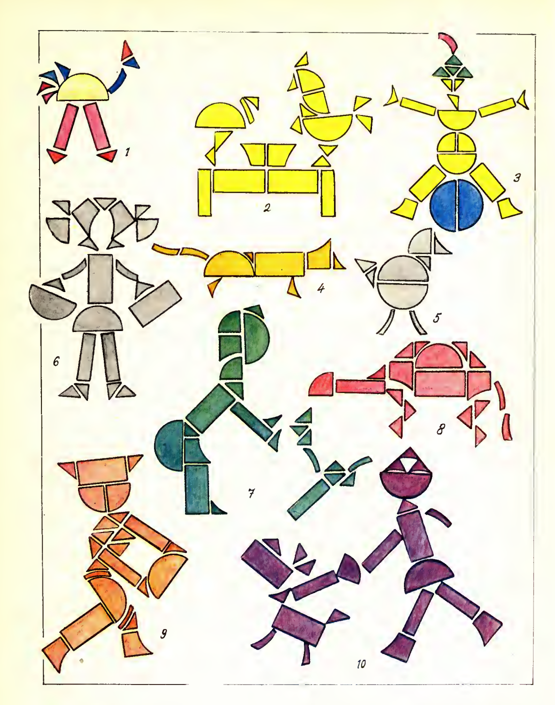
Рис. 1. Рис. 2.

Теперь вес содержимого формы *D* будет равен весу тела *A*, уменьшенному на вес вылитой воды. Но объем вылитой воды равен объему *A*. Следовательно, вес тела *A* в воде меньше чем в воздухе на величину веса воды, занимающей объем, равный объему тела *A*.

* * *

В заключение мы рекомендуем тем, кто интересуется историей физики, прочитать книгу «Начала гидростатики. Архимед, Стевин, Галилей, Паскаль» (Государственное технико-теоретическое изд-во, Москва, 1932). В ней приведены переводы оригинальных работ по гидростатике Архимеда, Стевина, Галилея, Паскаля.

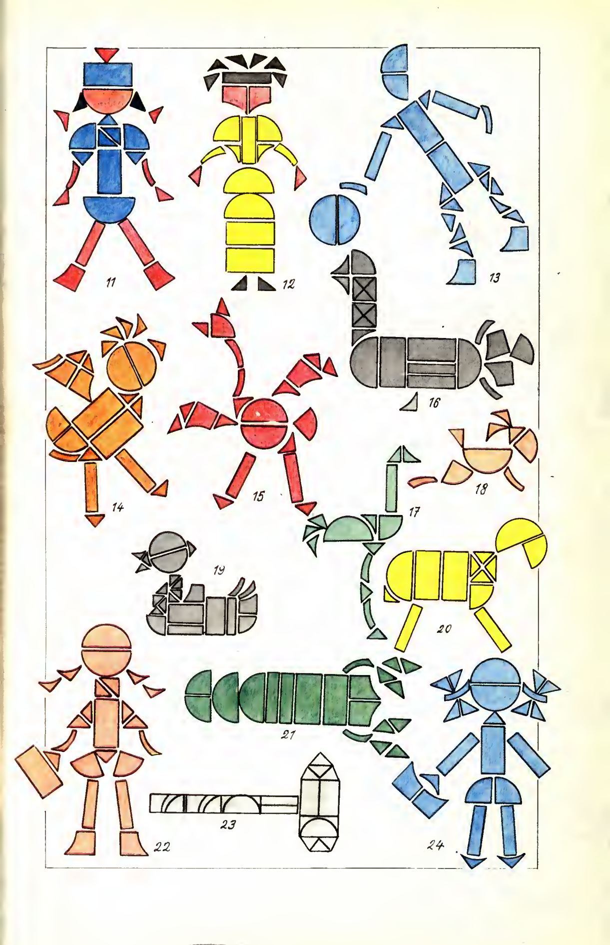
*) Долгое время «вес» рассматривался как некая характеристика тела. В этом смысле «собственный вес» следует понимать как «чистую» характеристику, ничем не искаженную. Следовало бы говорить о собственном весе тела как о весе его в вакууме, но в то время не различали понятия «воздух» и «вакуум».



Раскрой квадрата

Редакция получила свыше 1000 композиций по объявленному конкурсу (см. «Квант» № 2, 1977). Было отобрано 24 композиции для публикации: 1 — А. Рябчиков (Гомельская обл.); 2, 7, 9 — А. Можарова (Тамбов); 3 — А. Царев (Черновцы); 4, 17, 18 — А. Потапов (Московская обл.); 5 — Н. Трифонов (Красноярский край); 6 — И. Олейникова (Ставропольский край); 8 — С. Петраш (Ленинград); 10 — А. Сойфер (Пермь); 11, 12 — С. Губенина (Усть-Каменогорск); 13 — И. Цыганков (Севастополь); 14, 15 — А. Парфиров (Ульяновск); 16 — О. Шац (Московская обл.); 19 — Н. Тарасов (Новгородская обл.); 20, 21 — С. Коряк (Днепропетровск); 22 — О. Дымкова (Пенза); 23 — П. Капралов (Пенза); 24 — Л. Таначева (Удмуртская АССР).

По итогам конкурса лучшими были признаны композиции шестиклассницы Светы ГУБЕНИНОЙ и девятиклассниц Иры ОЛЕЙНИКОВОЙ и Тони МОЖАРОВОЙ, которые награждаются подпиской на «Квант» на 1978 год.


11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24



КООРДИНАТЫ

Я думаю, каждому из вас приходилось обращаться к прохожим с просьбой объясиить, где иаходится то или иное здаиие или учреждение. Отвечающих можио разделить иа три категории. Первые машут рукой в иекотором иаправлеиии и говорят «там», иногда добавляя «мииутах в двадцати ходьбы». Вторые говорят приблизительио так: «Пройдите булочиую, там будет поворот иалево, ио вы туда ие поворачивайте, а идите прямо мимо кафе, а когда пройдете кииживый магазии, повериите иалево, идите мимо школы, потом будет желтый двухэтажиый дом с колоииами, вот иапротив иего и будет ваше учреждеиие». Третьи отвечают так: «Идите прямо до улицы Чериышевского, повериите по ией иалево и второй дом от перекрестка с улицей Добролюбова иа правой сторoие — тот, который вы ищете».

И вот, следуя совету, вы двигаетесь в указаином иаправлеиии. Если возиикает сомиеиие в правильиости выбраииого пути, виовь обращаетесь к прохожим и в коице коицов иаходите иужиый дом. Как говорится, «язык до Киева доведет».

А что делать мореплавателям? У кого им спросить дорогу в открытом море? Как объясиить другим, где иаходится открытый ими остров?

И вот за 200 лет до иашей эры греческий учеиый Гиппарх предлагает хорошо вам известиые географические коордииаты: *широту* и *долготу*. С помощью этих двух чисел можио точио определить положеиие острова, поселка, горы или колодца в пустыие и иаиести их иа карту или глобус. Научившись определять в открытом море широту и долготу местоиахождеиия корабля, моряки получили возможиость, иикого ие спрашивая, выбирать иужиое им иаправлеиие.

Напомиим, что восточиую долготу и севериую широту обозиачают числами со зиаком «плюс», а западиую долготу и южиую широту — со зиаком «мииус». Таким образом, пара чисел со зиаками одиозиачио определяет точку иа земиом шаре. Например, пара $+70^{\circ}$, $+60^{\circ}$ определяет точку в цеитре острова Вайгач, расположеииого в Карском море.

У одиого из моих любимых писателей, Жюля Вериа, иекоторые ромаиы прямо построеиы иа ситуациях, связаииых с географическими коордииатами. В ромаие «Удивительиые приключеиия дядюшки Аитифера» одиому из героев известиа широта острова, иа котором спрятаиы сокровища, а другому — долгота этого острова. А вспомиим текст записки из ромаиа «Дети капитаиа Граита»:

«7 июия 1862 года трехмачтовое судио «Бритаиия» Глазго потерпело крушеиие ...гоии... южи... берег ...два матроса... Капитаи Гр... дости... коитии... пл. ... жесток... иид... брошеи этот докумеит ... долготы

н 37°11 широты ... окажнте нм помощь ... погнбнут.»

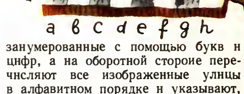
Сколько трудностей пришлось испытать героям романа, пока онн иашли капнтана Граита, н все нз-за того, что оказалось невозможным восстановить долготу.

В XIV веке французский математнк Н. Орсем ввел, по аналогин с географнческимн, координаты иа плоскости. Он предложнл покрыть плоскость прямоугольиой сеткой н называть шнротой и долготой то, что мы теперь называем *абсциссой* и *ординатой*.

Это нововведенне оказалось чрезвычайно удачиым. На его основе возннк метод коордннат, связавшнй геометрню с алгеброй. Основная заслуга в создаинн этого метода прннадлежнт великому фраицузскому математнку Рене Декарту. В его честь такая система коордннат называется декартовой. На этой снстеме осиоваиы многне способы указания места. Например, иа бнлете в кинотеатр стоят два чнсла: ряд н место — нх можно рассматривать как коордниаты вашего места в зале. Подобиые же координаты прнняты в шахматах, правда, вместо одиого из чнсел берется буква: вертнкальные ряды клеток обозначаются буквами латинского алфавнта, а горизонтальиые — цнфрамн

Таким образом, каждой клетке шахматиой доскн ставнтся в соответствие пара нз буквы н чнсла, н шахматнсты получают возможность записывать свои партни.

Тот же «шахматный» прннцип прнменяется сейчас на плаиах городов. Плаи города разбивают иа квадраты,



занумерованные с помощью букв н цнфр, а на оборотной староие перечнсляют все изображенные улнцы в алфавитном порядке н указывают, в каком квадрате онн находятся.

Существуют на плоскостн н другие снстемы коордниат. Вспомннм прохожего, который показывал направление рукой н говорил, сколько временн нужно ндтн. На таком прннцнпе основаиа *полярная система координат*. Чтобы ее ввестн, выбнрают начальную точку, иазываемую *полюсом* (поэтому снстема н называется «полярной»); из этой точки проводят луч, называющнйся *полярной осью*. Чтобы определнть координаты точкн иа плоскости, ее соеднняют отрезком с полюсом н вычисляют длнну этого отрезка н угол между ннм и полярной осью.

Иногда коордннаты выступают в завуалнроваином внде. Напрнмер, в зданнн Московского унверснтета на Леннннских горах комнаты нумеруются так, что по иомеру аудиторин можио узнать этаж, иа котором она иаходнтся. Для этого иомер нужно разбнть на две части: число сотен и остальиую часть. Чнсло сотен н есть этаж. Например, аудиторня 1503 иаходится на 15-м этаже, а 817 — иа восьмом.



До сих пор мы говорили о координатах на сфере или на плоскости, задающихся двумя числами. Существуют также координаты, задаваемые одним числом. Это координаты на прямой. Я думаю, каждый из вас знает, что достаточно задать одно число — расстояние от точки до начала отсчета, чтобы указать на прямой положение этой точки. В жизни мы очень часто сталкиваемся с такими координатами. Пример — железная дорога с километровыми столбами вдоль нее. Другой пример — номера домов на улице. А время? Хотя каждый момент времени мы обозначаем целым ворохом чисел: годом, месяцем, днем, часом, минутой и секундой, ясно, что можно обойтись одним



числом, выраженным, например, в секундах. Одним числом задается положение точки на окружности. Когда мы говорим «Ваня родился 14 сентября», мы, по существу, имеем дело с координатами на окружности (почему?).

Ну, а сколько координат зададут положение точки в пространстве? Естественно, три. Эти три числа можно получить, например, так. Соединим лучом центр Земли и нашу точку и рассмотрим широту и долготу пересечения луча с Землей и расстояние от нашей точки до центра Земли. Такая система координат называется *сферической*. Можно поступить по-другому. Выберем некоторую плоскость и введем на ней декартову систему координат, а нашей точке сопоставим координаты ее проекции на эту плоскость и расстояние от нее до плоскости, взятое со знаком плюс для одной половины пространства и со знаком минус — для другой; так мы получим декартову систему координат в пространстве.

Сферической системой координат обычно пользуются на аэродромах. Рядом с аэродромом ставят радиолокатор. Этот прибор умеет определять дальность до самолета, угол, под которым самолет виден над горизонтом, и угол между направлением на самолет и направлением на север.

В заключение обсудим одно деловое предложение. Каждую точку в пространстве можно задать тремя числами. Тем более можно задать тремя числами положение моей или вашей квартиры. Так зачем же писать на конвертах длинные адреса? Достаточно было бы договориться о системе координат (например, долготе, широте и номере этажа) и письма прекрасно приходили бы к адресату.

Вот тут-то пришла пора вспомнить письмо капитана Гранта. Ведь если вы ошибетесь в одной из цифр такого короткого адреса или эту цифру нельзя прочесть (мало ли что случится в дальней дороге), письмо до адресата не дойдет. Обычный адрес более устойчив. Если вы ошибетесь в нем не слишком сильно, письмо все равно дойдет до места. В адресе содержится, как говорят, избыточная информация. Избыточную информацию включил в свое письмо и капитан Грант. Он написал свое письмо на трех языках и сообщил не только координаты места крушения, но и материк, вблизи которого оно произошло. Но и этого оказалось недостаточно. Так что переходить на упрощенный адрес, пожалуй, не стоит.





И. Габович

Ответ в тригонометрическом уравнении

Запись ответа тригонометрического уравнения нередко связана с понятиями объединения и пересечения множеств. Обычно при решении таких уравнений получаются серии корней, и в окончательном виде ответ записывается в виде объединения этих серий. Но как быть, если эти серии пересекаются? Надо ли исключать повторяющиеся решения или это можно не делать?
С понятием пересечения множеств связан и еще один, видимо, самый важный вопрос: в ответе не должно быть значений переменной, при которых выражения в левой или правой частях уравнения не определены. Такие значения, если они появились в процессе решения, надо исключить. А для этого надо уметь находить пересечение различных серий.
Этим вопросам и посвящена настоящая статья.

Один пример

Рассмотрим решение следующей задачи.

Пример 1. *Решить уравнение*

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin 2x}=\frac{1}{\sin 4x}. \qquad (1)$$

Допустимые значения переменной определяются условиями $\sin x\neq 0$, $\sin 2x\neq 0$, $\sin 4x\neq 0$. Это дает нам $x\neq \pi k$, $x\neq \pi m/2$, $x\neq \pi n/4$ (k, m, $n\in\mathbf{Z}$). Легко заметить, что эти три условия можно заменить одним: $x\neq \pi n/4$ ($n\in\mathbf{Z}$). Заметить это можно как из рассмотрения тригонометрического круга (серия $x=\pi n/4$ содержит в себе серии $x=\pi k$ и $x=\pi m/2$), так и чисто алгебраически: при четных n из серии $x=\pi n/4$ получается серия $x=\pi m/2$, а при n, кратных четырем, получается серия $x=\pi k$. Можно и вообще не решать уравнения $\sin x=0$, $\sin 2x=0$, а заметить, что множество корней уравнения $\sin 4x=0$ содержит и корни уравнений $\sin x=0$, $\sin 2x=0$, поскольку $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x = 4\sin x\cos x\cos 2x$ (отсюда следует, что корнями уравнения $\sin 4x=0$ являются не только корни уравнения $\sin 2x=0$, но и корни уравнения $\cos 2x=0$, и аналогично для уравнения $\sin x=0$).

Теперь, домножив уравнение (1) на $\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 4x$, получим уравнение

$$\sin 2x\sin 4x-\sin x\sin 4x=\sin x\sin 2x,$$

равносильное исходному на области допустимых значений переменной. Преобразуя это уравнение, получим:

$$\sin 2x\sin 4x=\sin x\,(\sin 2x+\sin 4x),$$

$$\sin 2x\sin 4x=2\sin x\sin 3x\cos x,$$

$$\sin 2x\sin 4x=\sin 2x\sin 3x,$$

$$\sin 2x\,(\sin 4x-\sin 3x)=0,$$

$$\sin 2x\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{7x}{2}=0.$$

Остается рассмотреть три случая:

$$\sin 2x=0,\ \sin\frac{x}{2}=0,\ \cos\frac{7x}{2}=0.$$

Уравнение $\sin 2x=0$ не дает нам корней исходного уравнения, так как в рассматриваемой области должно быть $\sin 2x\neq 0$.

Уравнения $\sin\frac{x}{2}=0$ и $\cos\frac{7x}{2}=0$ дают нам соответственно серии $x_1=2\pi k$ и $x_2=\frac{\pi}{7}(2k+1)$ ($k\in\mathbf{Z}$).

Остается проверить, лежат ли они в области $x\in\mathbf{R}$, $x\neq\pi n/4$, $n\in\mathbf{Z}$. Серию x_1 проверить легко: поскольку $x\neq\pi n/4$, а при n, кратных восьми $n=8l$, получается как раз $x\neq 2\pi l$, вся серия x_1 исключается. Сложнее обстоит дело с серией x_2. Здесь нам надо выяснить, при каких целых k найдется такое n, что выполняется равенство

$$\frac{\pi(2k+1)}{7}=\frac{\pi n}{4},$$

и исключить такие k. Последнее урав-

нение приводится к виду

$$8k + 4 = 7n,$$

причем решать это уравнение надо в целых числах.

Линейные диофантовые уравнения с двумя переменными

Линейным диофантовым уравнением с двумя переменными называется уравнение вида

$$ax + by = c, \qquad (2)$$

где a и b — целые числа, отличные от нуля, c — произвольное целое число, причем требуется найти т о л ь к о целочисленные решения.

Можно считать, что числа a, b и c в уравнении (2) взаимно просты (мы всегда можем сократить обе части уравнения (2) на НОД $(a, b, c) \neq 1$). Но три взаимно простых числа п о п а р н о взаимно простыми могут и не быть (пример: 6, 10, 15). Очевидно, что если числа a и b в уравнении (2) не взаимно просты, то целочисленных решений это уравнение не имеет. В самом деле, положив $a = ka_1$, $b = kb_1$, получим $(a_1x + b_1y)\,k = c$, откуда $a_1x + b_1y = c/k$, и если x и y — целые, то и c/k — целое число, а это невозможно, поскольку c не делится на k (мы предположили, что a, b и c — взаимно простые числа).

Если же a и b в уравнении (2) — взимно простые числа, то уравнение имеет целочисленные решения. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого факта, а покажем лишь, как найти все решения, если известно хотя бы одно из них (его надо искать подбором).

Пусть (x_0, y_0) — какое-то целочисленное решение уравнения (2):

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Вычтем почленно это равенство из уравнения (2); получим

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

откуда

$$x = x_0 - \frac{b(y - y_0)}{a}. \qquad (3)$$

Чтобы x, определяемое формулой (3), было целым числом, необходимо и достаточно, чтобы число $\frac{b(y - y_0)}{a}$ также было целым. Но, по предположению, a и b взаимно просты, следовательно, целым должно быть число $\frac{y - y_0}{a}$. Обозначив отношение $\frac{y - y_0}{a}$ буквой t, получим:

$$x = x_0 - bt,$$
$$y = y_0 + at,$$

где $t \in \mathbf{Z}$.

Продолжение примера

Итак, нам надо решить в целых числах уравнение

$$7n - 4 = 8k.$$

Сразу видно, что n должно делиться на четыре; полагая $n = 4$, находим

$$7 \cdot 4 - 4 = 24 = 8k,$$

откуда $k = 3$. Нам удалось довольно быстро найти одно решение уравнения: $k = 3$, $n = 4$. Общее решение тогда записывается в виде $k = 3 + 7t$, $n = 4 + 8t$ $(t \in \mathbf{Z})$.

Отсюда следует, что в серии x_2 (см. с. 53) надо исключить все k вида $3 + 7t$, то есть ответ к примеру 1 можно записать в виде

$$x = \frac{\pi}{7}(2k + 1), \ k \neq 7t + 3, \ t \in \mathbf{Z}$$

или

$$\left\{ \frac{\pi}{7}(2k + 1) \mid k \neq 7t + 3; \ k, t \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Уравнение $8k+4=7n$ можно решать и без использования общей теории. Из него следует, что $n=4l$ (поскольку левая часть уравнения делится на четыре). Подставляя $n=4l$ в уравнение, получаем: $8k+4=28l$, откуда $2k+1=7l$. Далее l должно быть нечетно, $l=2t+1$; поэтому $2k+1=14t+7$, $k=7t+3$. Вот решение и получилось: $k=7t+3$, $n=4l=4\,(2t+1)=8t+4$.

Запись ответа

Теперь рассмотрим еще одну задачу.

П р и м е р 2. *Решить уравнение*

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2.$$

Пользуясь известными тождествами, получаем:

$$\frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} + \frac{1 - \cos 10x}{2} = 2,$$

$$\cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0,$$

$$2\cos 5x \cos x + 2\cos 9x \cos x = 0,$$

$$\cos x (\cos 5x + \cos 9x) = 0,$$
$$\cos x \cos 2x \cos 7x = 0.$$

Рассматривая три случая, получаем три серии корней (k, l, $m \in \mathbf{Z}$):

1) $\cos x = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$;

2) $\cos 2x = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2}$;

3) $\cos 7x = 0$, $x_3 = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi m}{7}$.

Как записать ответ? Надо ли перечислять все три серии? Посмотрим, пересекаются эти серии или нет. Здесь можно действовать разными способами.

Способ геометрический. «Период» серий равен π. Рассмотрим те корни из серий x_1, x_2, x_3, которые попадают в промежуток $[0; \pi]$. Это будут

$x_1 : \pi/2$;

$x_2 : \pi/4, \ 3\pi/4$;

$x_3 : \pi/14, \ 3\pi/14; \ 5\pi/14, \ \pi/2, \ 9\pi/14, \ 11\pi/14, \ 13\pi/14$.

Сразу видно, что серия x_1 содержится в серии x_3, а серии x_2 и x_3 не пересекаются. Значит, ответ можно записать в виде

$$\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \ \ \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7} \,|\, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Способ алгебраический. Общим знаменателем в сериях x_1 и x_2 будет 4:

$$x_1 = \frac{\pi(2 + 4k)}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi(1 + 2l)}{4}.$$

Если $x_1 = x_2$, то $2 + 4k = 1 + 2l$, но слева — четное число, а справа — нечетное. Равенство невозможно, серии x_1 и x_2 не пересекаются. Аналогично получаем, что серии x_2 и x_3 тоже не пересекаются. А вот для серий x_1 и x_3 получаются формулы

$$x_1 = \frac{\pi(7 + 14k)}{14}, \quad x_3 = \frac{\pi(1 + 2m)}{14}.$$

Из равенства $7 + 14k = 1 + 2m$ получаем $m = 7k + 3$. Это означает, что для всякого k найдется целое m такое, что будет выполняться равенство $7 + 14k = 1 + 2m$, то есть всякий корень из серии x_1 встретится и в серии x_3, поэтому серия x_1 содержится в серии x_3, и в ответе писать ее не надо.

Пример 3. *Решить уравнение*

$$\cos 7x (\sin 5x - 1) = 0.$$

Сразу получаем два случая ($k, n \in \mathbf{Z}$):

1) $\cos 7x = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7}$;

2) $\sin 5x = 1$, $x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{2n\pi}{5}$.

Пересекаются ли эти серии? Посмотрим. Из равенства

$$\frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$$

следует $5k = 14n + 1$. Это уравнение имеет решения. Одно из них находим подбором: $k = 3$, $n = 1$, а общее тогда имеет вид $k = 3 + 14t$, $n = 1 + 5t$.

Ответ можно записать в виде

$$\left\{ \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}; \ \ \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} \,|\, k \neq 3 + 14t; \ k, n, t \in \mathbf{Z} \right\}$$

или в виде

$$\left\{ \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}; \ \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} \,|\, n \neq 1 + 5t; \ k, n, t \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Замечание. Иногда объединение серий выглядит довольно просто. Например, объединение серий $x_1 = \pi k$ и $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi l$ имеет вид $x = \frac{\pi n}{2}$.

Пренебрегать таким упрощением ответа не стоит. А иногда, наоборот, объединение серий выглядит сложнее самих серий. В таких случаях бывает полезно разбить эти серии на «куски». Например, объединение серий $x_1 = \frac{\pi k}{2}$ и $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$ можно записать в виде

$$\left\{ \frac{\pi k}{2}; \ \frac{\pi}{6} + \pi k; \ \frac{5\pi}{6} + \pi k \,|\, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Системы

При решении некоторых тригонометрических уравнений их заменяют эквивалентной системой уравнений,



Олимпиады МФТИ

Различные математические конкурсы в истории математики известны с давних пор. История донесла до нас сведения о математических конкурсах, проводимых еще в XIII веке.

История школьных физико-математических олимпиад начинается с 1894 года, когда в Венгрии была проведена первая математическая олимпиада школьников (так называемое «соревнование Этвеша»).

В Советском Союзе первая математическая олимпиада школьников была проведена в Ленинграде весной 1934 года. Инициаторами проведения этой олимпиады были член-корреспондент АН СССР Б. Н. Делоне (председатель оргкомитета олимпиады) и профессор В. А. Тартаковский.

По инициативе Московского математического общества осенью 1935 года была проведена первая Московская математическая олимпиада школьников. Московские математики встретили ее с большим воодушевлением. В оргкомитет вошли крупнейшие математики-москвичи.

Вплоть до Великой Отечественной войны математические олимпиады в Москве проводились ежегодно и очень скоро завоевали всеобщее признание. Во время войны московские математики провели олимпиады в Ашхабаде и Казани. После Отечественной войны проведение математических олимпиад стало традицией во многих городах Советского Союза.

Вслед за математиками свои олимпиады стали проводить физики, химики, астрономы, географы, биологи, а затем и лингвисты.

Первые олимпиады по физике были проведены Московским университетом еще в 1938 году. С тех пор эти олимпиады стали традицией для московских школьников.

В дальнейшем такие олимпиады начали проводить Московский физико-технический институт (МФТИ) и другие вузы Москвы. Почин москвичей подхватили в других городах страны.

В феврале 1962 года состоялась первая «большая» физико-математическая олимпиада школьников, проводимая по инициативе МФТИ. В ней приняли участие свыше 6500 школьников из 58 городов Советского Союза. Она проводилась в один тур во время зимних каникул.

Интересна форма проведения олимпиады. Студенты и аспиранты института проводили ее во время зимних каникул в своих родных городах. А затем решения задач привезли в Москву, где их проверяли. Всю работу по организации олимпиады возглавил комитет ВЛКСМ.

Начиная с 1964 года физические и математические олимпиады проводились совместно под руководством Министерства просвещения РСФСР. Эти олимпиады получили название Всероссийских физико-математических олимпиад.

С 1967 года проводятся уже Всесоюзные физико-математические и химические олимпиады (Всесоюзные олимпиады).

К сожалению, и история олимпиад и задачи, предлагаемые на этих олимпиадах, постепенно забываются и с годами все труднее и труднее их восстановить.

Вышедшая в издательстве «Знание» книга «Физико-математические олимпиады» *) призвана в какой-то степени заполнить этот пробел. В ее основу легли материалы, накопленные организаторами олимпиад ведущего физического вуза страны — Московского физико-технического института. Однако, это не означает, что она носит узко «ведомственный» характер. Олимпиады МФТИ являются важнейшей

*) А. П. Савин и др. «Физико-математические олимпиады». М., «Знание», 1977.

а затем находят пересечение множеств решений. Часто эти пересечения находятся легко. Но иногда для нахождения решений необходимо решать диофантово уравнение.

Пример 4. *Решить уравнение*

$$\cos 2x + \cos \frac{3x}{4} = 2. \qquad (4)$$

Поскольку наибольшее значение функции $y = \cos t$ равно 1, уравнение (4) равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos \frac{3x}{4} = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 = \pi k, \\ x_2 = \frac{8\pi n}{3} \end{cases}$$

($k, n \in \mathbf{Z}$). Решением уравнения (4) является пересечение серий x_1 и x_2, то есть нам надо решить уравнение

составной частью Всесоюзных олимпиад, а задачи, представленные в книге, отличаются высоким научным уровнем и хорошо продуманы с методической точки зрения.

Книга начинается с рассказа об истории олимпиад. Авторы книги непосредственно принимали участие в проведении «больших» олимпиад, и им есть что рассказать читателям. Эта глава, написанная живо и эмоционально, является хорошей затравкой к книге.

Вторая и третья главы содержат формулировки задач, соответственно по математике и физике, предлагавшихся на олимпиадах МФТИ. Собранные задачи являются лишь частью того множества задач, которые за 15 лет предлагались на олимпиадах.

Следует подчеркнуть, что большинство задач совершенно не стандартны и в целом довольно трудны.

Многие задачи сформулированы очень затейливо и пожалуй даже чересчур искусственно: в формулировках участвуют не только разные звери, насекомые и рыбы, но даже — ...привидения. Но за замысловатой формулировкой скрываются очень содержательные и трудные математические задачи. Так одна очень необычная задача связана с Али-бабой и... селедками. Сама по себе она очень сложна — требуется придумать стратегию, следуя которой, можно привести все селедки в одинаковое положение за фиксированное число ходов (задача 98).

Победитель международной олимпиады 1975 года Боря Юсин (теперь он — студент МГУ) вместе с младшим братом довольно долго пытались обобщить эту задачу, когда «селедок» n, а смотреть и менять разрешается только k из них. В конце концов они придумали даже два различных решения. Вот как Б. Юсин сформулировал задачу в общем виде:

Петя и Вася играют в следующую игру. У них есть пластина в форме правильного n-угольника, в углах которой расположены n выключателей, закрытых колпачками. Петя хочет, чтобы все выключатели были одновременно либо включены, либо выключены. Для этого он может открыть любые k колпачков и поставить каждый из этих k выключателей в любое положение по своему выбору, после чего он должен отвернуться, а Вася тем временем закрывает колпачки и может повернуть пластину на любой угол. Затем Петя снова может сделать то же самое и т. д. Начальное положение Пете неизвестно. Если он добивается своего, Вася сообщает ему это, как только он отворачивается. При каких k и n у Пети есть выигрышная стратегия?

Попробуйте и вы решить эту задачу. Ответ оказывается таким:

Разложим n на простые множители: $n = p^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, причем $p > p_1 > p_2 > \ldots > p_j$. Тогда выигрышная стратегия существует в том и только в том случае, когда $k \geqslant n - n/p$.

Возможно и другие задачи из этого сборника могут натолкнуть внимательных читателей на интересные размышления.
В то же время в книге есть и относительно простые задачи, их присутствие делает книгу вполне доступной тем, кто только начинает учиться решать задачи. Нетрадиционность (с точки зрения школьных критериев) формулировок задач требует и некоторой нестандартности мышления при решении таких задач. Именно это и отличает олимпиадные задачи от задач, обычно решаемых на школьных уроках. В то же время все собранные в книге задачи не требуют ничего выходящего за рамки обычной школьной программы. Представляется интересным и включение в книгу нескольких задач по физике, взятых из архивов жюри физтеховских олимпиад и требующих умения оценить те или иные физические величины из соображений размерности. К сожалению, таких задач обычно мало бывает даже на олимпиадах, школьников практически не учат делать оценки. Умение же оценивать те или иные величины в практических зада-

---

$\pi k = \frac{8\pi n}{3}$. Из него получаем уравнение $3k = 8n$, имеющее решение $k = 8t$, $n = 3t$. Значит, ответ в задаче выглядит так:

$$\{8\pi t \mid t \in \mathbf{Z}\}.$$

Упражнения

Решить следующие уравнения.

1. $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos x \cos 2x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos 2x \cos 3x}$.
2. $\cos x\,(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x) = 4 \sin 3x \sin 4x$.
3. $\cos 3x \operatorname{tg} 5x = \sin 7x$.
4. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} 3x + \operatorname{ctg} 4x = 0$.
5. $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3x}{2} - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$.
6. $1 + \sin x - \cos 5x - \sin 7x = 2 \cos^2 \frac{3}{2} x$.
7. $2 \cos^2 3x + \sin 5x = 1$.
8. $\sin x \sin 3x + \sin 6x \sin 10x = 0$.
9. $\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2$.

чах может придти только после соответствующей практики, и этому надо учить и школьников, и студентов как можно раньше.

В четвертой и пятой главах приводятся решения задач, собранных в главах 2 и 3. Решения написаны достаточно подробно. Пониманию, а часто и краткости решений, очень способствуют рисунки, сопровождающие формулировки и решения задач.

Некоторое неудовлетворение остается от полиграфического оформления книги. К сожалению, значительная часть рисунков, относящихся к отдельным задачам, приводится не на тех страницах, где напечатаны сами задачи. Это затрудняет чтение книги. Досадно, что отсутствует единообразие и в наборе формул (например, по-разному набраны дробные выражения).

В последней главе книги — шестой — приводятся задачи, также предлагавшиеся на олимпиадах, но уже без решений. Включение такой главы в книгу чрезвычайно полезно именно потому, что она дает очень богатый дополнительный материал для самостоятельной работы школьникам, материал для учителей и руководителей физико-математических кружков, для студентов и организаторов олимпиад, который можно использовать для различных видов внеклассной работы по физике и математике.

Эта книга, рассчитанная на школьников старших классов и учителей, безусловно сыграет важную роль в пропаганде физико-математических знаний.

В заключение мы хотели бы привести несколько задач из этой книги:

Математика

1. Дан угол на плоскости. Найти множество центров окружностей, описанных вокруг равнобедренных треугольников, у которых вершины при основании лежат на противоположных сторонах этого угла, а третья вершина — в данной точке A на его биссектрисе.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали. Доказать, что четырехугольник с вершинами в точках пересечения медиан треугольников ABC, ABD, ACD и BCD подобен данному.

3. В основании четырехгранной пирамиды — ромб с углом 60° при вершине A. Боковое ребро, выходящее из вершины A, равно стороне ромба. Доказать, что из остальных боковых ребер можно составить прямоугольный треугольник.

4. На шахматной доске 8×8 клеток ставятся две фишки. Два игрока поочередно делают ходы каждый своей фишкой. Фишка первого игрока может при каждом ходе передвигаться лишь на одну клетку по вертикали или горизонтали. Фишка второго — на одну клетку по вертикали или горизонтали либо на одну клетку — по диагонали. Выигрывает тот, кто поставит свою фишку на фишку партнера. Кто выигрывает при правильной игре?

5. n игроков играют в следующую игру: имеется $(2n+1)$ шашек, из них $2k$ черных, остальные белые. Играющие садятся вокруг стола и каждый из них получает по две шашки. По жребию один из игроков берет оставшуюся шашку. Если у него при этом три шашки оказываются одного цвета, то он выиграл, и игра прекращается, если нет, то он оставляет себе шашки одинакового цвета, а третью отдает соседу справа. Если у того окажутся три шашки одинакового цвета, то он выиграл, если нет, то он делает то же, что и первый, и т. д.

Доказать, что при k, не равном n, игра окончится за конечное число передач шашек (ходов). Найти максимально возможное число ходов в этой игре.

Физика

6. Человек идет по шпалам железной дороги. Максимальная длина его шага 0,8 м. Шпалы уложены так, что на любом стометровом участке ровно 200 шпал. Расстояние между шпалами не меньше 0,3 м и не больше 0,6 м и может меняться в этих пределах от шпалы к шпале. При какой укладке шпал человек сделает максимальное число шагов на 1 км пути, а при какой минимальное?

7. Два автомобиля имеют одинаковую мощность. Максимальная скорость первого v_1 км/ч, второго v_2 км/ч. Какую максимальную скорость смогут развить автомобили, если один возьмет на буксир другого?

8. Оцените минимальную допустимую продолжительность суток для планеты с массой M и радиусом R.

9. При неправильной регулировке двигателя внутреннего сгорания иногда вместо сравнительно медленного сгорания горючей смеси происходит так называемая «детонация», когда смесь сгорает быстро со взрывом. Почему при этом падает к.п.д. двигателя?

10. В кабине космического корабля имеется высокочастотная печь для исследования плавления в условиях невесомости. Хорошо проводящий тепло металлический шар нагревается в печи токами высокой частоты и начинает плавиться. Разработайте методику экспериментального определения времени полного расплавления шара. Для простоты считайте, что теплообмен шара с окружающей средой пропорционален разности их температур. Космонавт-исследователь имеет возможность наблюдать за плавлением визуально, может изменять подводимую к шару мощность и пользоваться необходимыми ему приборами и справочниками.

11. Оцените, какими должны быть размеры металлических пылинок в Солнечной системе, чтобы солнечное световое давление сообщило бы им скорость, направленную от Солнца? Светимость Солнца $L = 4\cdot10^{33}$ эрг/с, его масса $M = 2\cdot10^{33}$ г, гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67\cdot10^{-8}$ дин$\cdot$см²/г².

М. Смолянский,
А. Стасенко

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М406—М420, Ф423—Ф437 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

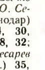
Большинство читателей, приславших свои решения, успешно справились с задачей **М406**. Остальные задачи решили: *С. Абаджян* (с. Дараков ГрССР) **07, 08**; *А. Аббасов* (Джебраильский р-н АзССР) **18**; *Б. Амосов* (Мытищи) **08**; *В. Ансоткин* (Ленинград) **07, 08, 09, 10а—г), 13, 15, 17—19, 20**; *С. Антонов* (Киев) **07, 18**; *Б. Аронов* (Саратов) **07, 11, 12, 16, 17, 19**; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) **07, 08, 16**; *П. Баньковский* (Уральск) **07**; *В. Батырев* (Москва) **07, 08, 12—16, 18**; *В. Беняш-Кривец* (Новогрудок) **08**; *А. Бер* (Ташкент) **08, 14**; *М. Бествина* (СФРЮ) **08**; *П. Билер* (ПНР) **07—09, 13, 14**; *И. Биргер* (Киев) **07, 08**; *И. Блиадзе* (Тбилиси) **07**; *Б. Блок* (Москва) **07—09, 12—14, 16, 17, 19**; *В. Бугаенко* (Киев) **07, 08, 17**; *И. Вайсбурд* (Томск) **08**; *И. Воронович* (г. п. Сопоцкино Гродненской обл.) **07, 08, 16**; *А. Гарнаев* (Таллин) **08**; *Р. Гассиев* (с. Суижа СОАССР) **08**; *А. Гатилов* (Воронеж) **08**; *Р. Геворкян* (Ереван) **08, 18**; *И. Гершенгорин* (Харьков) **08**; *Б. Гисин* (Ленинград) **07—09, 10а—г), 12, 13, 15—19, 20**; *Е. Глезин* (Ленинград) **07—09), 10а—г), 12, 13, 15—19**; *Д. Гольденберг* (Ленинград) **09**; *А. Готовиков* (с. Кубенское Вологодской обл.) **08**; *С. Гришечкин* (Москва) **07—09, 13, 19, 20**; *В. Гроссман* (Одесса) **12**; *М. Грунтович* (д. Новый Двор Гродненской обл.) **08**; *С. Губанов* (Ворошиловград) **08**; *А. Даниелян* (Ленинакан) **07, 08**; *А. Диденко* (Краснодар) **08**; *А. Егоян* (Тбилиси) **07**; *А. Ефашкин* (Оренбург) **13, 14, 16, 19, 20**; *И. Захаревич* (Ленинград) **08, 09, 12, 13**; *Р. Измайлов* (Баку) **07**; *С. Исаков* (Пермь) **08, 12**; *И. Искендеров* (с. Нюсиюс Нахичеванской АССР) **18**; *А. Исмаилова* (Мингечаур) **18**; *Л. Казарова* (Ереван) **16**; *Б. Каплан* (Киев) **07—09, 13, 16, 17, 19**; *А. Карпов* (Ленинград) **08, 09**; *В. Карташев* (Елец) **08**; *Ш. Касимов* (Киев) **13**; *В. Каскевич* (д. Новый Двор Гродненской обл.) **08**; *А. Касянчук* (Николаев) **08, 09, 12, 16, 18, 19**; *А. Кириллов* (Ленинград) **07, 08, 12**; *В. Книжник* (Москва) **07—09, 13—19, 20**; *А. Князюк* (Киев) **07—09**; *В. Кокоц* (Липецк) **09**; *Л. Корельштейн* (Москва) **07—09, 12, 13, 15, 16, 18, 19**; *А. Крейндлин* (Москва) **07, 08, 12, 14**; *А. Кулеско* (Донецк) **07—09, 13, 16, 20**; *С. Лавренченко* (Москва) **12, 13, 16, 19**; *Е. Лаврова* (Ленинград) **12, 13**; *М. Левинзон* (Ленинград) **07—09**; *Р. Леманн* (ГДР) **13**; *Е. Лумельская* (Пермь) **07**; *С. Майский* (Москва) **17**; *Г. Мамедов* (Баку) **08, 12**; *З. Мамедов* (Баку) **18**; *В. Медведь* (Молодечно) **07—09**; *А. Мирлин* (Ленинград) **07—09, 13, 16**; *А. Мкртчян* (Ленинакан) **07, 08**; *А. Мошонкин* (Кирово-Чепецк) **07, 08, 13, 15—19**; *А. Набутовский* (Новосибирск) **08, 12, 16**; *М. Народицкий* (Куйбышев) **07, 09, 13**; *Е. Огиевецкий* (Днепропетровск) **08**; *А. Панеях* (Москва) **12, 13, 15**; *Д. Папуш* (Харьков) **07—09, 16, 17**; *Д. Патарая* (Тбилиси) **08, 14**; *А. Петухов* (Новосибирск) **07, 08**; *С. Полыгалов* (Пермь) **07**; *В. Рогава* (Тбилиси) **07**; *А. Родников* (Москва) **07, 08, 12, 13, 15, 16, 18**; *М. Свикловский* (ПНР) **19**; *В. Свинцов* (Камышин) **07**; *В. Свиридов* (Воронеж) **08**; *Р. Севдималыев* (Шаифлин АзССР) **18**; *М. Селектор* (Ленинград) **07—09, 16—19, 20**; *А. Сердюк* (Херсон) **17**; *П. Сильвестров* (Новосибирск) **08**; *М. Соколовский* (Москва) **07, 11, 13, 16—19**; *А. Сорчмелия* (Тбилиси) **13**; *В. Стовба* (Москва) **07, 09, 17**; *Л. Стотлан* (Хабаровск) **14**; *Н. Тренев* (Москва) **07, 09, 19**; *В. Трофимов* (Москва) **07—09, 12—18**; *В. Угриновский* (Хмельник) **08, 18**; *У. Умирбаев* (с. Туркуль Чимкентской обл.) **08, 18**; *В. Фалько* (Харьков) **07, 08, 12, 17, 18**; *Г. Фирсова* (Ленинград) **13, 18**; *С. Харенко* (Ангарск) **08**; *Г. Шахбазян* (Ленинград) **16**; *В. Шпильрайн* (Москва) **07**; *Ю. Штейншрайбер* (Баку) **08, 09, 13**; *В. Щукин* (Ленинград) **07—09, 10а—в), 16—19**; *Л. Энтин* (Москва) **07, 09, 11—13**; *В. Эткин* (Москва) **14**; *Р. Эфендиев* (Баку) **18**; *А. Юрновец* (с. Романовка Красноярского кр.) **07, 08**; *Н. Ясинская* (с. Мазуровка Винницкой обл.) **18**.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф423—Ф437**, справились с задачами **Ф423** и **Ф436**. Остальные задачи правильно решили: *А. Абрамян* (Ереван) **24—26**; *А. Аванесян* (с. Нор-шен АзССР) **33**; *Б. Авдеев* (ст. Староминская Краснодарского кр.) **35**; *А. Авдюшков* (Минск) **37**; *В. Акопян* (Ленинакан) **29, 32**; *Е. Александрова* (Глазов) **32**; *Б. Амосов* (Мытищи) **24, 26**; *И. Ананьев* (Москва) **33—35, 37**; *А. Арбатский* (Благовещенск Амурской обл.) **37**; *М. Багаутдинов* (Магнитогорск) **25**; *Ф. Багдасарян* (Баку) **27—29**; *А. Багиров* (с. Кировка АзССР) **37**; *К. Базык* (Москва) **33—35, 37**; *А. Бакан* (Киев) **33, 37**; *О. Батищев* (Череповец) **24—28, 30**; *А. Беликов* (Москва) **25, 27—30, 32**; *О. Березюк* (Челябинск) **37**; *П. Билер* (Вроцлав ПНР) **24, 26, 35, 37**; *В. Бирюков* (Туймазы) **35, 37**; *А. Бобров* (Пермь) **24—27, 30, 32**; *Т. Болтуруков* (с. Тюп КиргССР) **28**; *А. Большаков* (Саратов) **37**; *Е. Бурлакова* (Асбест) **37**; *И. Вайсбурд* (Томск) **24, 25, 28, 29, 34**; *А. Васильев* (п. Черноголовка Московской обл.) **33—35**; *Д. Великанов* (Красноярск) **24—27**; *Н. Великороссов* (Конаково) **24, 28, 29**; *С. Веселянский* (Харьков) **24, 26, 31, 32, 34, 35, 37**; *Я. Виннишин* (Туапсе)

29, 31, 32, 34, 35, 37; *В. Вирясов* (Павлоград) **24, 27**; *А. Вихров* (Калининград Московской обл.) **24, 25, 34, 35, 37**; *О. Вишнепольский* (Рига) **34, 35, 37**; *В. Гаврилов* (Орск) **24, 26, 34, 35, 37**; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) **35, 37**; *Ю. Гаврилов* (Славянск) **37**; *Н. Газда* (п. Клевань Ровенской обл.) **35**; *В. Гаркавый* (Лида) **24—32, 34, 35, 37**; *В. Гармаш* (Запорожье) **24—30, 32—35**; *А. Гатиссов* (Воронеж) **37**; *Р. Геваркян* (Ереван) **32**; *М. Глазунов* (Старый Оскол) **31, 33, 34, 37**; *О. Глушко* (Москва) **24, 25, 35**; *О. Голощапов* (с. Архангельское Тульской обл.) **25, 26**; *Е. Гордиенко* (Кишинев) **24—26, 32, 35**; *Е. Горюнова* (Петропавловск-Камчатский) **26**; *А. Готовиков* (с. Кубенское Вологодской обл.) **24, 27**; *А. Грайфер* (Запорожье) **33, 35, 37**; *Б. Грибов* (Воронеж) **24—26, 28, 30—32**; *В. Гришачев* (п. Лесной Рязанской обл.) **34, 35, 37**; *С. Деревенник* (п/о Межиречье Гродненской обл.) **37**; *М. Диберчуес* (с. Хуизах ДАССР) **28, 29, 32**; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) **24, 26, 33, 35, 37**; *Д. Дубровин* (Калининград) **24, 25, 27, 30**; *И. Еникеев* (с. Ютца ТАССР) **29, 32**; *Ф. Еникеев* (Уфа) **24**; *В. Ерофеев* (Новосибирск) **33—35, 37**; *К. Жангозин* (Караганда) **24, 37**; *В. Жуков* (Абаза) **25, 26**; *М. Жуков* (Москва) **31**; *А. Забродин* (п. Черноголовка Московской обл.) **24—30, 34, 35, 37**; *А. Завриев* (Москва) **35, 37**; *Н. Зализняк* (пгт Ольшанка Кировоградской обл.) **35**; *В. Запасников* (Волгоград) **35**; *В. Заславский* (Днепропетровск) **24**; *А. Захаров* (Брест) **24, 25, 27**; *И. Захаров* (Ленинград) **35**; *М. Зельман* (Троицк) **28, 29**; *В. Иванов* (Минск) **34, 35, 37**; *В. Иванов* (с. Бороговцы Усть-Лабинской обл.) **24, 27**; *Н. Иванова* (Броды) **35**; *А. Иванушкин* (Рига) **35, 37**; *И Ден Нам* (Южно-Сахалинск) **25, 26**; *Л. Ильчук* (Рогатин) **34, 35, 37**; *В. Каган* (Минск) **34, 37**; *З. Кадыров* (с. Муслюмово ТАССР) **35**; *Е. Казарова* (Ереван) **24**; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) **34, 35, 37**; *А. Кан* (Алма-Ата) **35**; *В. Карлов* (Сочи) **26**; *С. Карнаух* (Ростов-на-Дону) **34, 35, 37**; *О. Карпенко* (Киев) **35, 37**; *Л. Киневский* (Челябинск) **35, 37**; *М. Кирсанов* (Тула) **24—26, 28, 29, 32**; *И. Кирюшин* (Ивано-Франковск) **24, 25, 34, 35**; *С. Клейман* (пгт Луков Волынской обл.) **24—26, 35, 37**; *Г. Колпаков* (Набережные Челны) **35**; *В. Комов* (Александров) **37**; *Г. Корионов* (Москва) **26, 29, 31, 34, 37**; *В. Коробов* (Саратов) **31, 37**; *А. Косенкова* (Баку) **33**; *И. Костенко* (Сумы) **24, 25**; *В. Коток* (Харьков) **24—27**; *А. Кречетников* (Сумы) **24, 26, 37**; *С. Крушинский* (Сарань) **37**; *В. Кузьменко* (Чернигов) **24, 28**; *В. Куликов* (Иваново) **25**; *Г. Купчишин* (с. Чижовка Житомирской обл.) **29, 32, 35**; *Л. Куравский* (Калуга) **24—26, 31, 32**; *С. Куратов* (Кишинев) **31, 37**; *М. Курбатов* (Москва) **24, 26—32, 35, 37**; *С. Лавренченко* (Москва) **26, 35**; *Д. Лапин* (Калининград) **35**; *Д. Лапшин* (Калининград) **24, 25**; *В. Лашкин* (Киев) **24, 34, 35**; *А. Левченко* (Свердловск) **33, 37**; *А. Листовничий* (Киев) **24, 27, 31**; *Ю. Литвинович* (п/о Ситница Брестской обл.) **24—26, 31**; *В. Лобзин* (Свердловск) **24—27, 29—31**; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) **37**; *Л. Лознер* (Минск) **24—27**; *Т. Лозовой* (п. Совостлейко Горьковской обл.) **24—27**; *С. Лукашенко* (Минск) **34, 35, 37**; *С. Ляхимец* (Киев) **27**; *А. Магадеев* (д. Карачаево БашкАССР) **28, 35, 37**; *С. Магомедов* (с. Кубра ДАССР) **35**; *С. Майский* (Москва) **24, 26, 27, 31, 34, 35**; *Т. Макиенко* (Днепропетровск) **24**; *А. Малаховский* (Львов) **24**; *В. Малинин* (Нижний Тагил) **24, 25, 27—29, 31, 32**; *А. Масягин* (Смоленск) **24—32**; *М. Матвеев* (Канаш) **24—28, 30—32**; *А. Матякубов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **37**; *А. Мачахов* (с. Верхневилюйск ЯАССР) **35**; *Б. Межевевич* (Киржач) **31**; *В. Мелани* (Ереван) **33—35, 37**; *В. Мелихов* (Электрогорск) **35, 37**; *А. Местников* (с. Верхневилюйск ЯАССР) **35**; *Г. Метревели* (Цхинвали) **35, 37**; *Ю. Мидодашвили* (Цхинвали) **24—27**; *С. Минаев* (Кемерово) **35, 37**; *Ю. Минаев* (Киев) **24—27**; *А. Мирлин* (Ленинград) **24, 26, 37**; *А. Михайлов* (д. Кисербош ЧАССР) **24, 33—35, 37**; *М. Молдовский* (Тбилиси) **25—27**; *К. Морозов* (Пермь) **24, 26, 27**; *И. Муллагалов* (Уфа) **24, 26**; *О. Мусаев* (Баку) **24, 25, 27, 30, 31**; *Ю. Мухарский* (Киев) **24—27, 29—31**; *С. Мухин* (Ленинград) **33, 35**; *Б. Налибоцкий* (Минск) **24—35, 37**; *Б. Наткович* (Тбилиси) **24**; *И. Нескоромный* (Симферополь) **34, 35**; *С. Нестер* (Днепропетровск) **24, 37**; *О. Нетсадзе* (Кутаиси) **33, 35**; *А. Никитенков* (Великие Луки) **24—35**; *Н. Никифоров* (Великие Луки) **25—27, 29, 31, 32, 37**; *А. Николаев* (ст. Дубки) **37**; *Л. Николаев* (Москва) **29, 31**.; *О. Николаев* (с. Верхневилюйск ЯАССР) **28, 29**; *В. Николайчик* (Старые Дороги) **24—27**; *В. Николайчик* (Москва) **28, 29, 31, 32, 34, 35, 37**; *И. Овсянников* (Саратов) **24, 27—35**; *Е. Огиевецкий* (Днепропетровск) **24, 26, 27, 31**; *Э. Озолин* (Борисов) **28, 31, 32, 35, 37**; *М. Онегин* (Архангельск) **24, 25, 28, 35**; *А. Осипов* (п. Новосельский Новгородской обл.) **37**; *К. Оспанов* (Байрам-Али) **25, 26, 31, 35, 37**; *М. Оспанов* (Семипалатинск) **37**; *В. Палей* (Харьков) **26, 28, 32, 34, 35, 37**; *А. Панченко* (Харьков) **34, 35**; *О. Певзнер* (Днепропетровск) **28, 30, 32, 33, 35, 37**; *И. Петренко* (Поти) **37**; *С. Петренко* (Запорожье) **34, 35, 37**; *В. Петров* (Псков) **28, 32, 33, 37**; *А. Петухов* (Цимлянск) **24—26, 34, 35, 37**; *В. Писецкий* (Запорожье) **24—27, 29—32, 37**; *Н. Плотникова* (с. Верхневилюйск ЯАССР) **32**; *П. Побылица* (Ленинград) **24—27, 33—35, 37**; *А. Полвонов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **35**; *А. Померанцев* (Москва) **28**; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) **28—35, 37**; *А. Попов* (Чусовой) **28, 32, 37**; *С. Попов* (Москва) **24, 25**; *Д. Портнов* (Николаев) **34, 35, 37**; *В. Потемкин* (Великие Луки) **28—30**; *Я. Поярков* (Владивосток) **35, 37**; *Н. Прудзе* (Кутаиси) **33, 35**; *В. Рева* (с. Худолцевка Полтавской обл.) **32**; *А. Родин* (Великие Луки) **24, 26, 28, 32, 35, 37**; *С. Розуван* (Киев) **24, 25**; *А. Романов* (Киев) **24, 25**; *И. Романова* (Москва) **28, 37**; *Ю. Ростовцев* (Горький) **25**; *А. Савков* (Иркутск) **37**; *И. Савченко* (Киев) **24—29, 32, 34, 35, 37**; *Ю. Саежин* (Магнитогорск) **34, 35**; *А. Саипов* (Ташкент) **24, 25**; *Г. Салахлы* (с. Сарачло ГрССР) **24, 27**; *М. Салахлы* (с. Сарачло ГрССР) **24**; *Д. Самедов* (Масаллы) **25**; *С. Самохин* (Калининград) **28, 30—32**; *Г. Санадзе* (Тбилиси)

24, 26, 27; *А. Сатилин* (Киев) 28, *И. Свечко* (Гродно) 37; *И. Семенов* (Воронеж) 26; *Ю. Семенов* (Одесса) 28; *А. Семеренко* (Краснодар) 24; *П. Сильвестров* (Новосибирск) 24, 30, 34, 37; *В. Синицын* (Ульяновск) 25, 28, 32; *Л. Скатков* (Харьков) 25, 26; *В. Слесарев* (п. Широкий Ворошиловградской обл.) 35, 37; *В. Смирнов* (Ленинград) 26; *В. Смирнов* (Уфа) 24, 25, 27; *А. Смышляев* (Ленинград) 28; *В. Сорокин* (Днепропетровск) 30, 33—35; *В. Сорокин* (Усть-Каменогорск) 24, 25, 27; *В. Софронов* (Москва) 34, 35, 37; *В. Спинеев* (Ворошиловград) 24, 26; *М. Стащенко* (Киев) 32—35, 37; *В. Стовба* (Москва) 24, 25; *М. Стойнов* (Москва) 30, 33; *С. Субботин* (Алма-Ата) 25; *М. Султанов* (Бостанлыкский р-н Ташкентской обл.) 29, 32; *Р. Султанов* (Ташкент) 26, 34, 37; *А. Суханов* (с. Бутырки Воронежской обл.) 37; *С. Татулов* (Дербент) 25, 26, 28; *В. Тихон* (с. Метибово Гродненской обл.) 25; *Г. Ткаченко* (Чирчик) 37; *И. Толох* (Жидачов) 24, 25, 28—30; *К. Третьяченко* (Киев) 24—27; *А. Тычинский* (Витебск) 24; *А. Тюрин* (Курск) 35; *А. Уверский* (Сестрорецк) 37; *М. Уршанский* (Ижевск) 24, 30; *А. Фальковский* (Алма-Ата) 35, 37; *А. Фарбер* (Тамбов) 35, 37; *Н. Федин* (Омск) 24—29, 31, 32; *Р. Федин* (Кемерово) 35; *В. Фекета* (Турьи Реметы Закарпатской обл.) 37; *И. Фесенко* (Днепропетровск) 24; *А. Фомин* (Новосибирск) 24, 30—32, 37; *А. Франкенберг* (Ташкент) 33, 35, 37; *С. Фурман* (Черновцы) 37; *К. Хаджиев* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 28, 32; *О. Хайкин* (Чебоксары) 34, 35, 37; *А. Хачатуров* (Баку) 26, 27; *А. Хизанишвили* (Тбилиси) 37; *А. Худошин* (Харьков) 24—27; *В. Цветков* (п. Комсомолец Кустанайской обл.) 35; *И. Цуркис* (Калининград) 24—26, 28, 30—32; *Д. Чачава* (Тбилиси) 37; *В. Чеканов* (Быхов) 24, 25, 28, 29, 32, 34, 35, 37; *Л. Черных* (Лида) 28, 29, 33; *Б. Черныш* (ст. Лысогорская Ставропольского кр.) 26; *А. Чурилов* (Харьков) 24—26; 28, 34, 35; *Г. Шарипов* (с. Угали БАССР) 34, 35, 37; *Р. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) 24—26; *А. Шафаренко* (Караганда) 24—27; *Д. Шафер* (Ленинград) 37; *А. Шафир* (Челябинск) 37; *К. Шахназарян* (Баку) 33, 35, 37; *А. Швейдель* (Великие Луки) 24, 26, 28, 35, 37; *В Шевченко* (Краснодар) 24, 26, 28, 35, 37; *О. Шейнин* (Мозырь) 34; *А. Шептовецкий* (Москва) 24—27, 33—35, 37; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) 24, 26, 27, 32—34, 37; *И. Шиян* (Киев) 24—27; *Ю. Штейншрайбер* (Баку) 24—27; *Р. Шувар* (п. Рогатин Ивано-Франковской обл.) 24—29, 31, 32; *Д. Шулембаев* (Алма-Ата) 37; *В. Шутько* (Новосибирск) 37; *В. Щукин* (Ленинград) 25—27, 30; *М. Щукюров* (с. Дигях АзССР) 28; *А. Яременко* (Кадиевка) 26; *И. Янюс* (Шилуте) 37.



К статье «Задачи на повторение»

Ответы. IX класс. **1**. в. **2**. д. **3**. г. **4**. б. **5**. в. **6**. г. **7**. в. **8**. г. **9**. б. **10**. г.

X класс. **1**. а. **2**. г. **3**. в. **4**. а. **5**. г. **6**. б. **7**. д.

Решения и комментарии к отдельным задачам.

IX—1. Для того чтобы соответствие между конечными множествами X и Y, заданное с помощью стрелок, являлось функцией с областью определения X, необходимо и достаточно, чтобы из каждого элемента множества X выходила одна и только одна стрелка. Значит, число стрелок должно равняться числу элементов множества X; в данном случае, когда $x \subset \{x_1, x_2, x_3\}$, число стрелок может быть от 0 до 3 (соответствие с 0 стрелками есть функция с пустой областью определения).

IX—3. $x^2-y^2=0 \Leftrightarrow x-y=0$ или $x+y=0$, поэтому исходное уравнение задает объединение прямых $y=x$ и $y=-x$.

IX—5. Значение $2A$ можно указать с точностью до 0,02, а если два числа известны с точностью до 0,02, то их разность можно указать с точностью до $0,02+0,02=0,04$. (Границы погрешностей как при сложении, так и при вычитании складываются.)

IX—6. Треугольник с длинами сторон a, b и c существует тогда и только тогда, когда справедливы неравенства $|a-b|<c<a+b$.

IX—8. $S_a(A)=B$, $S_b(B)=D$, поэтому $(S_b \circ S_a)(A)=D$ (другая запись: $(S_b \circ S_a)(A)=S_b(S_a(A))=S_b(B)=D$). Отметим, что при решении этой задачи участники республиканских олимпиад ошибались чаще всего.

IX—9. $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$, поэтому $\vec{x}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}$.

IX—10. Площади подобных треугольников относятся как квадраты длин сходственных отрезков, поэтому для искомого расстояния h имеем $h^2:1=1:2$, откуда

$$h=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

X—1. Достаточно указать 6 человек работающих в первую смену (остальные пойдут во вторую); из 12 их можно выбрать C_{12}^6 способами.

X—2. Известно, что $0,1093 \leqslant x < 0,1094$ и $0,3006 \leqslant y < 0,3007$, поэтому $0,4099 \leqslant x+y < 0,4101$. Следовательно, первая цифра после запятой обязательно 4, а вторая может оказаться как 0, так и 1.

X—4. Это — лемма из п. 45 учебника «Алгебра и начала аналнза 9».

X—5. Нужно правильно применить формулу для производной сложной функции.

X—6. Плоскость пересекает ребро, еслн границы этого ребра лежат по разные стороны от плоскости, поэтому, точка A лежит по одну сторону от плоскости, точка B — по другую. Тогда точка C — там же, где A, точка D — там же, где B. Следовательно, плоскость должна пересечь ребро AD.

X—7. Для произвольных ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ в пространстве можно указать вектор $\vec{b}$, перпендикулярный к ним обоим; поэтому угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$ может быть любым.

К статье «Ответ в тригоиометрическом уравиеиии»

1. $\{\pi/12+\pi k;\ 5\pi/12+\pi k\ |k\in \mathbf{Z}\}$. Указание. Уравненне прнводится к внду $\operatorname{tg} 3x=1$ в областн, определяемой условиями $x\in \mathbf{R}$, $\sin 4x\neq 0$, $\cos 3x\neq 0$.

2. $\{(-1)k\pi/36+\pi k/6; \pi k; \pi/4+\pi k/2\ |k\in \mathbf{Z}\}$. Указанне. Уравненне прнводнтся к виду $\sin 4x=0$, $\sin 6x={}^1/_2$ в области, определяемой условнямн $x\in \mathrm{R}$, $\cos x\neq 0$, $\cos 3x\neq$ $\neq 0$.

3. $\{\pi k;\ \pi/20+\pi k/10\ |k\in \mathbf{Z}\}$. Указание. Привести уравнение к виду $\cos 10x\times$ $\times \sin 2x=0$ прн условии $\cos 5x\neq 0$.

4. $\{\pi(2k+1)/8;\ \pi(2n+1)/6\ |n\neq 1+3l;$ $k,\ l,\ n\in \mathbf{Z}\}$.

5. $\{\pi(2k+1)/4; \pi(2k+1)/7; \pi(2m+1)/5)m\neq$ $\neq 5n+2;\ k,\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$.

6. $\{\pi(2k+1)/8;\ -\pi/4+\pi k\ |k\in \mathbf{Z}\}$.

7. $\{3\pi/22+2\pi k/11\ |k\in \mathbf{Z}\}$.

8. $\{\pi k/9;\ \pi n/7\ |n\neq 7m;\ k,\ m\ n\in \mathbf{Z}\}$.

9. $\{4\pi k\ |k\in \mathbf{Z}\}$.

10. $\varnothing$

К статье «Сигиалы, графы и короли иа торе»

(см «Квант» №7)

1. $\alpha(G_1)=1$, н. н. м. — любая вершина; $\alpha(G_2)=3$, н. н. м. — $\{1, 3, 4\}$; $\alpha(G_3)=2$, н. н. м. — $\{1,5\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 6\}$; $\alpha(G_4)=4$, одно нз н. н. м. $\{1, 4, 7, 10\}$.

2. $[n/k+1)]$.

3. G_1^2 и G_2^2 изображены на рнсунке 1; в графе G_4^2 все вершины соедннены; граф G_5^2 изображен на рисунке 4 в статье (надо только не склеивать его края); граф G_3^2 постройте самостоятельно.

4. а) Разбейте граф P_{2s}^2 на квадратнки 2×2, в каждом нз них будет не более одной точки из M.

б) Предположите, что на какой-то вертикали стоит меньше s точек из M и воспользуйтесь тем, что на любой паре соседних вертикалей стоит не более $[n/2]$ точек из M.

в) Решается аналогично предыдущей, только здесь на вертикалях чередуются s и $s+1$ точек нз M (кроме одной пары соседних вертикалей).

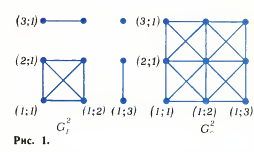


Рис. 1.

5. $\alpha(P_5^2)=5$. Перегоним одну нз вершин M в точку (0; 0). Если на вертнкали 0 или горнзонтали 0 стонт еще одна точка нз M, то еще более двух вершин нз M разместнть не удастся. Далее рассмотреть еще точку на вертикали 1 или горнзонтали 1 и перегнать ее (снмметрней) (в 1; 3) или в (2; 1)— после этого все определится

6. В графе G^k есть н. м. M^k (M — н. н. м. G).

7. n^k.

8. 3^k-1.

9. Провести индукцию по k.

10. $(n/2)^k$. Указанне. См. задачу 4а н указание к ней (н. н. м. здесь — M^k, где M — н. н. м. графа P_n).

К статье «Теория игр»

(см. «Квант» № 8)

1. Матрнца игры нмеет вид

	Алик	Коля
Сеня	3	0
Вася	1	2

Это дает следующую задачу: $3p_1+p_2\geqslant$ $\geqslant v$, $2p_2\geqslant v$, $p_1+p_2=1$; если положнть $x_1=p_1/v$, $x_2=p_2\,v$, $L=1/v$, то получнтся задача линейного программнрования

$$\begin{cases} 3x_1+x_2\geqslant 1, \\ 2x_2\geqslant 1, \\ x_1\geqslant 0, \\ x_2\geqslant 0, \\ L(x_1,\ x_2)=x_1+x_2. \end{cases}$$

(нщем миннмум). Решенне этой задачн дает

$$x_1={}^1/_6,\ x_2={}^1/_2,\ L={}^2/_3,$$
$$v={}^3/_2,\ p_1={}^1/_4,\ p_2={}^3/_4.$$

Такнм образом, Сеню следует ставнть в одном случае нз четырех, а Васю во всех остальных. Этого можно добиться, скажем, подброснв две монеты: еслн на обенх выпадет решка, то играет Сеня. Легко найтн, что

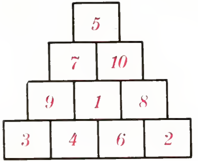


Рис. 2.

5	3	2	0	3	6	5
0	4	1	1	0	1	5
2	6	6	6	0	3	3
4	5	2	2	1	4	4

5	3	2	0	3	6	5
0	4	1	1	0	1	5
2	6	6	6	0	3	3
4	5	2	2	1	4	4

Рис. 3.

100 − 4 = 96

10 − 2 = 8

10 + 2 = 12

Рис. 4.

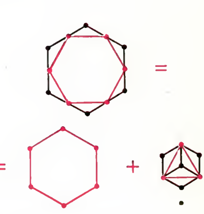


Рис. 5.

противникам надо одинаково часто ставить Алика и Колю (то есть перед матчем бросать лишь одну монету).

2. Здесь получается $p_1 = 0$, $p_2 = 1$. Поразительное дело: менее результативного Петю нужно ставить в каждой игре, хотя в среднем уже удастся забить только один гол, а не полтора! Но и противники должны быть начеку и чаще прежнего ставить высокорослого защитника: их оптимальная стратегия — ставить Алика в одном случае из трех ($q_1 = {}^1/_3$, $q_2 = {}^2/_3$; впрочем, тот же итог даст им любая стратегия $0 \leqslant q_1 \leqslant {}^1/_3$, $q_2 = 1 - q_1$, например, $q_1 = 0$, $q_2 = 1$ — Алик сидит на скамье запасных).

3. Русский сразу же отпадает, так как в любом случае дает не больше баллов, чем любая из двух других стратегий. Здесь имеет место *доминирование* двух стратегий над третьей. Решение дает: физика — ${}^1/_3$, алгебра — ${}^2/_3$. Как реализовать такую смешанную стратегию? Петя должен бросить игральную кость, и если выпадет 3 или 6 — учить физику, в остальных случаях — алгебру. Все это, разумеется, верно, если учителя действительно придираются к Пете, — в этом случае они должны с вероятностью ${}^3/_4$ устроить контрольную по алгебре, а с вероятностью ${}^1/_4$ — по физике. Если же учителя не преследуют Петю (гораздо более разумное предложение), то правильнее применить подход Бейеса и учить алгебру.

К задачам «Квант» для младших школьников

(*см. «Квант» № 8*)

1. 20 *кг*. 2. См. рис. 2. 3. 123 457 896. 4. 37·99=3663. 5. В деревне *A*. Действительно, для любой другой точки *M* будет $|AM| + |MB| \geqslant |AB|$, $|AM| + |MC| \geqslant |AC|$, причем хотя бы в одном случае неравенство строгое. Значит, $20|AM| + 20|MB| \geqslant 20|AB|$ и $10|AM| + 10|MC| \geqslant 10|AC|$. Поскольку хотя бы в одном случае неравенство строгое, то, складывая неравенства, получаем $30|AM| + 20|MB| + 10|MC| > 20|AB| + 10|AC|$.

К головоломкам

(*см. «Квант» № 8, 3-ю с. обл.*)

См. рис. 3—5.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красников, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор *М. Л. Медведская*
113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 24/VI-77 г.
Подписано в печать 3/VIII-77 г.
Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 5,60.
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 6,40. Т-13262.
Цена 30 коп. Заказ 1377. Тираж 289 910 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Ребята с нашего двора

Кто не знает ребят с нашего двора: Симу, Римму, Фиму, Тиму и Диму? Их часто называют «дружной пятеркой» и не без основания: они все делают вместе. Вместе ходят в школу (хотя учатся в разных классах), летом вместе купаются в пруду, зимой вместе катаются на катке во дворе нашего дома, и даже — удивительное совпадение! — день рождения у них общий: все пятеро родились в один день, хотя и в разные годы. В этом году ребятам исполнилось... впрочем, это вы узнаете, заполнив следующий «кроссамбер».

По горизонтали

1. Куб возраста Фимы в том году, когда Сима была вдвое старше Димы, а Римма — вдвое старше Тимы. 3. Утроенное произведение возраста Фимы и суммы возрастов Симы и Тимы. 5. Произведение возрастов Тимы и Симы, когда они станут на год старше. 7. Произведение возраста Фимы и наименьшего из трехзначных простых чисел, бóльших наименьшего трехзначного простого числа. 9. Произведение удвоенных возрастов Симы и Димы. 11. Возраст Симы в том году, когда она станет втрое старше, чем был Тима, когда Сима была вдвое старше его. 12. Произведение возрастов Фимы и Тимы, когда Дима был вдвое моложе. 13. Возраст Димы в том году, когда Римма достигнет совершеннолетия. 14. Квадрат возраста Тимы. 16. Удвоенное произведение возрастов Симы и Димы через год. 19. Квадрат суммы возрастов Фимы и Симы. 21. Трехзначное число, первая цифра которого совпадает с половиной возраста Димы, а две последние — с удвоенным возрастом Димы. 23. Произведение квадрата возраста Димы и полусуммы возрастов Симы и Риммы. 25. Квадрат суммы возрастов Тимы и Димы минус квадрат возраста Димы. 27. Произведение возрастов Фимы и Тимы, когда каждый из них станет на 10 лет старше. 28. Произведение возрастов Тимы и Димы через год. 29. Произведение возрастов Димы 5 лет назад и через 5 лет. 30. Куб возраста Димы. 31. Произведение суммы возрастов Симы и Фимы и суммы возрастов Риммы и Тимы, когда все ребята станут на год старше. 32. Куб возраста Симы, когда Сима была втрое старше Димы. 35. Произведение возраста Фимы и суммы возрастов Риммы, Симы и Фимы. 37. Квадрат возраста Риммы. 38. Куб возраста Тимы. 40. Произведение возрастов Фимы и Димы. 41. Сумма возрастов Тимы, Димы и Риммы. 42. Возраст Димы в том году, когда Тиме исполнится столько лет, сколько сейчас Римме. 43. Сумма возрастов Риммы, Фимы и Димы. 46. Куб возраста Фимы в том году, когда Сима была вдвое старше Димы. 49. Произведение возраста Симы через 5 лет и возрастов Симы и Риммы 5 лет назад. 50. Квадрат возраста Симы, когда ей было столько лет, сколько сейчас Римме, а Римме — столько лет, сколько сейчас Диме. 51. Куб возраста Димы. 53. Произведение возраста Симы на число лет, которое ей исполнится, когда она станет вдвое старше.

По вертикали

1. Возраст Симы в том году, когда самому младшему из ребят исполнится 100 лет. 2. Произведение суммы возрастов Риммы и Фимы и суммы возрастов Симы, Тимы и Димы. 4. Произведение возрастов Симы и Фимы. 5. Возраст Риммы в том году, когда Фиме исполнится 100 лет. 6. Сумма возрастов Симы, Риммы, Фимы, Тимы и Димы. 7. Произведение возраста Тимы и двузначного простого числа. 8. Куб возраста Риммы, когда она была втрое старше, чем Сима, когда та была втрое старше Риммы. 9. Учетверенное произведение возрастов Тимы и Риммы через год. 10. Произведение возрастов Симы и Тимы, когда они станут на 11 лет старше. 15. Квадрат возраста Фимы. 17. Разность квадратов возрастов Фимы и Тимы. 18. Суммы возрастов Симы, Риммы и Димы. 19. Квадрат возраста Тимы, когда он станет старше на столько лет, сколько сейчас Тиме и Диме вместе. 20. Простое число. 21. Утроенный квадрат возраста Симы. 22. Квадрат суммы возрастов Риммы, Тимы и Фимы. 23. Произведение возрастов Симы, Риммы и Фимы год назад. 24. Произведение возраста Симы, когда Тиме исполнится столько лет, сколько сейчас Симе, и возраста Симы, когда Тима станет еще на 10 лет старше. 25. Произведение возраста Димы, когда Фиме исполнится столько лет, сколько сейчас Симе, и возраста Тимы, когда Диме будет столько лет, сколько сейчас Симе. 26. Произведение возрастов Симы и Риммы. 33. Сумма возрастов Симы, Риммы, Фимы и Димы в том году, когда родился Тима. 34. Произведение возрастов Тимы и Симы. 36. Произведение возрастов Риммы через 5 лет и 5 лет назад. 38. Произведение возраста Симы, когда она станет на год старше, и суммы возрастов Риммы, Фимы и Димы. 39. Произведение возрастов Тимы и Фимы и разности возрастов Симы и Тимы. 40. Произведение возраста Риммы, когда она станет в полтора раза старше, и квадрата возраста Тимы. 44. Произведение возрастов Риммы, Фимы и Димы. 45. Сумма возрастов Тимы и Димы через 20 лет. 47. Произведение возрастов Тимы сейчас, через 4 года и 4 года назад. 48. Квадрат возраста Риммы, когда она была на год моложе. 51. Учетверенное произведение возраста Симы, когда она станет старше на столько лет, сколько сейчас Тиме, и возраста Тимы. 52. Произведение возраста Фимы сейчас, через 7 лет и 7 лет назад.

Ю. Данилов


ХЛЕБ
ФИМА
100
ЛЕТ

Цена 30 коп.
Индекс 70465

К нашим читателям

Объявляется подписка на 1978 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант»

«Квант» адресован всем школьникам 5—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи и хотят в будущем серьезно заниматься точными науками.

Наш журнал полезен и тем школьникам, интерес которых к точным наукам еще дремлет.

На страницах нашего журнала публикуются статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и о проблемах, еще ожидающих своего решения; рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них — задачи различных олимпиад и просто интересные задачи.

Раздел «Лаборатория «Кванта»» рассказывает о поучительных экспериментах, которые можно осуществить в домашних условиях.

Какие вопросы и задачи могут ожидать абитуриента на вступительных экзаменах? Ответы на эти и многие другие вопросы, с которыми приходится сталкиваться при поступлении в вузы, читатель найдет в разделе «Практикум абитуриента».

Наш журнал полезен и учителям. Сейчас произведены коренные изменения в школьных курсах математики и физики. «Квант» всячески старается освещать на своих страницах эти изменения, публикуя статьи по новой программе.

В 1977 году «Квант» открыл новую рубрику «По страницам школьных учебников». В статьях этого раздела разбираются наиболее тонкие и важные вопросы математики, изучаемой в школе. В 1978 году мы существенно расширим эту рубрику.

Мы также предполагаем в 1978 году значительно расширить раздел ««Квант» для младших школьников».

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

●

ЖУРНАЛ РАСПРОСТРАНЯЕТСЯ ТОЛЬКО ПО ПОДПИСКЕ

●

**При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465
Цена номера 30 коп.**